

MATEMATICAS II EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2020 - Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2020

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{array}{l} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
- (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

- Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = a^2 + a = a \cdot (a + 1) = 0 \implies a = \{0, -1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$
 $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$
 $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^o$ incóg. = 3 $\xrightarrow{\text{Rouche}}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} x + \lambda = 1 \\ y - \lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \end{array} \right) \\ &\sim \left[\begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -1 & 1 & -a & 2a \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 3a \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -a = 0 \implies a = 0 \\ a+1 = 0 \implies a = -1 \end{cases} \\ \bullet \quad &\text{Si } a \neq \{-1, 0\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \square \\ 0 & \square & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE DETERMINADO} \\ \bullet \quad &\text{Si } a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1/3 \end{array} \Rightarrow \text{SIST. INCOMPATIBLE} \\ \bullet \quad &\text{Si } a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO} \end{aligned}$$

- b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} x + \lambda = 1 \\ y - \lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
- (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
- (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

- a) Si queremos que $f(x)$ y $g(x)$ tomen el mismo valor en un punto c del intervalo $[1, 10]$ ha de verificarse:

$$f(c) = g(c) \implies h(c) = f(c) - g(c) = 0$$

Es decir que el problema se reduce a determinar si la función $h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ tiene alguna raíz en el intervalo $[1, 10]$, para lo que aplicaremos el *Teorema de Bolzano*, que dice:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } h(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ \text{Signo } h(a) \neq \text{Signo } h(b) \sim h(a) \cdot h(b) < 0 \end{array} \right\} \implies \exists c \in (a, b) \mid h(c) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } h(x) \text{ es continua en } [1, 10] \checkmark \\ h(1) \cdot h(10) = (-3) \cdot 1239 < 0 \checkmark \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Th. Bolzano}} \exists c \in (1, 10) \mid h(c) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

- b) La pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ es $m_r(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$. Si queremos determinar el punto en donde la pendiente es mínima tendremos que hallar el mínimo de la función $m_r(x)$:

$$\left. \begin{array}{l} m'_r(x) = 6x + 6 = 0 \implies x = -1 \\ m''_r(x) = 6 > 0 \stackrel{\cup}{\implies} \text{Mínimo} \end{array} \right\} \implies \text{La pendiente mínima se sitúa en el punto } x_0 = -1 \implies y_0 = f(-1) = 1 \text{ y valdrá } m_r(1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -3$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = -3(x + 1) \implies \boxed{r \equiv y = -3x - 2}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} \ln|x| \right]_1^2 = \left(\frac{8}{18} + \frac{4}{4} - \frac{1}{6} \ln|2| \right) - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \ln|1| \right) \\ &= \frac{41}{36} - \frac{1}{6} \ln 2 \simeq 1.023 \end{aligned}$$

————— o —————

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, se pide:

- (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \equiv \left\{ \begin{array}{c} R(0, -2, 1) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 3) \end{array} \right.$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \left\{ \begin{array}{c} S(-1, -4, 0) \\ \vec{d}_s = (2, -1, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{RS} = (-1, -2, -1)$$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}_r, \vec{d}_s] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \text{ y como } \vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $\pi \equiv \begin{cases} P(2, -1, 5) \\ \pi \perp r \implies \vec{n}_\pi = \vec{d}_r = (1, 1, 3) \end{cases} \implies 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + D = 0 \Rightarrow D = -16$

$$\boxed{\pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0}$$

c) $\beta \equiv \begin{cases} \beta \parallel r \implies \vec{u}_\beta = \vec{d}_r = (1, 1, 3) \\ s \in \beta \implies \begin{cases} S(-1, -4, 0) \\ \vec{v}_\beta = \vec{d}_s = (2, -1, 1) \end{cases} \end{cases} \implies \beta \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y + 4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\boxed{\beta \equiv 4x + 5y - 3z + 24 = 0}$$

————— o —————

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
- (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos: $D_i \equiv$ El arquero hace diana en el disparo i

a) $P(D_1) + P(\overline{D_1} \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79$

b) $P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$

c) Sea X el número de arqueros que aciertan al globo $\rightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.85)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0.85^6 \cdot 0.15^4 = 0.04$$

_____ o _____

Julio 2020

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballo por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballo, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned}x &\equiv \text{"Precio del kilo de dorada (euros)"} \\y &\equiv \text{"Precio del kilo de lubina (euros)"} \\z &\equiv \text{"Precio del kilo de rodaballo (euros)"}\end{aligned}$$

Escribimos las ecuaciones, teniendo en cuenta que expresamos las cantidades en miles de kilos y el precio en miles de euros.

$$\begin{cases} 13740x + 23440y + 7400z = 275800 \\ x = y + 0.11 \\ 7400z = 63600 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 1 & -1 & 0 & 0.11 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 0 & -37180 & -7400 & -274288.6 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 13740x + 23440 \cdot 5.6667 + 7400 \cdot 8.5946 &= 275800 & \Rightarrow & x = 5.7767 \\ \Rightarrow -37180y - 7400 \cdot 8.5946 &= -274288.6 & \Rightarrow & y = 5.6667 \\ \Rightarrow 7400z &= 63600 & \Rightarrow & z = 8.5946\end{aligned}$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
- (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
- (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

- a)
 - Si $x \in [-4, 1)$, $f(x) = (x-1)^2$, que es continua en \mathbb{R} .
 - Si $x \in (1, 4]$, $f(x) = (x-1)^3$, que es continua en \mathbb{R} .
 - Si $x = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 = 0$

• $f(1) = (1-1)^2 = 0$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$

- b) La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x < 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x-1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3(x-1)^2 = 0$
- $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } [-4, 4]$

- Si $x \in [-4, 1)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es *decreciente*.
- Si $x \in (1, 4]$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es *creciente*.

c) $g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Continuidad en $x = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x-1) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3(x-1)^2 = 0$

• $g(1) = 2(1-1)^2 = 0$

Luego $g(x)$ es continua en $x = 1$.

- Derivabilidad en $x = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x - 1) = 0$

Luego $g(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
- (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

- Para hallar la proyección de Q sobre π :

- Determinamos la recta r perpendicular a π que pase por Q .

$$r \equiv \begin{cases} Q(-1, 0, 1) \in r \\ r \perp \pi \implies \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 2, -3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

- La proyección Q' será el punto de corte de r con π .

$$r \cap \pi \implies (-1 + \lambda) + 2 \cdot 2\lambda - 3 \cdot (1 - 3\lambda) = 4 \implies \lambda = \frac{4}{7} \implies Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

- Sea α el plano paralelo a π que pasa por P .

$$\alpha \equiv \begin{cases} P(-3, 1, 2) \\ \alpha \parallel \pi \implies \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\pi = (1, 2, -3) \end{cases} \implies -3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 7$$

$\alpha \equiv x + 2y - 3z + 7 = 0$

- Llamamos β al plano perpendicular a π que pasa por P y Q .

$$\beta \equiv \begin{cases} Q(-1, 0, 1) \in \beta \\ \beta \perp \pi \implies \vec{u}_\beta = \vec{n}_\pi = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_\beta = \overrightarrow{PQ} = (2, -1, -1) \end{cases} \implies \beta \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$-5x - 5y - 5z = 0 \implies \beta \equiv x + y + z = 0$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(B) = 0.25 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.125$$

Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?
- b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?
- c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde \overline{A} denota el suceso complementario al suceso A).
- d) (0.75 puntos) Calcular $P(\overline{B} | A)$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

- a) C es incompatible con A y con $B \Rightarrow P(A \cap C) = 0 \quad \& \quad P(B \cap C) = 0$
 $P(C \cap (A \cup B)) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = P(\emptyset) = 0 \Rightarrow$ incompatibles
- b)
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.125 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \end{array} \right\} \Rightarrow A$$
 y B son independientes
- c)
$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - (0.5 + 0.25 - 0.125) = 0.375 \end{aligned}$$
- d)
$$P(\overline{B} | A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5 - 0.125}{0.5} = 0.75$$

----- o -----