MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2018
- Ordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2018 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) *(0.5 puntos) Calcular* $A^\top A$ *y* $AA^\top$, *donde* $A^\top$ *denota la matriz traspuesta de* A.

b) *(1.25 puntos) Hallar* A^{-1} *y resolver el sistema lineal* $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) *(0.75 puntos) Calcular* C^2, *donde* $C = ABA^\top$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Antes de empezar escribimos $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ para operar mejor.

a) $A^\top A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$

$AA^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$

b) Dado que $A^\top A = AA^\top = I \implies A^{-1} = A^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Llamamos $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y resolvemos $AX = D \implies X = A^{-1} \cdot D$

$$X = A^{-1} \cdot D = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

c) $C^2 = \left(ABA^\top\right)^2 = AB\underbrace{A^\top \cdot A}_{I}BA^\top = AB^2A^\top = A \cdot (2I)^2 \cdot A^\top = A \cdot 4I \cdot A^\top$

$$= 4\underbrace{AA^\top}_{I} = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = 3x^2 \cdot e^{-x}$, se pide:

a) *(1 punto) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

b) *(0.75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$.*

c) *(0.75 puntos) Calcular los límites: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = 6x \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} = (6x - 3x^2) \cdot e^{-x} \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0, 2)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(2, {}^{12}/_{e^2})$

b) $$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{3x^{\cancel{2}} \cdot e^{-x}}{\cancel{x}}\,dx = \int_0^1 3x \cdot e^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 3x & \Rightarrow du = 3\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

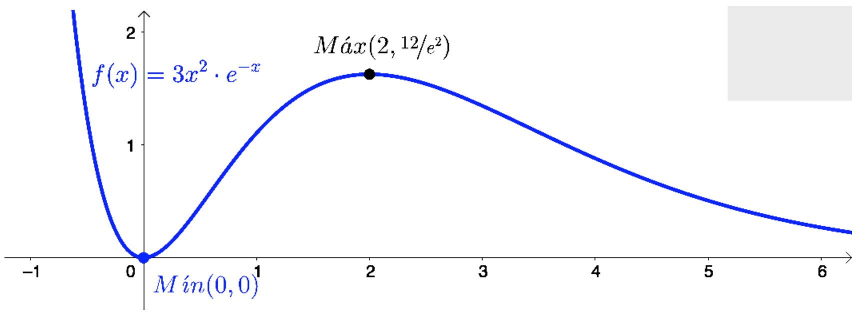
$$= -3x \cdot e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 3e^{-x}\,dx = -3x \cdot e^{-x} - 3e^{-x}\Big]_0^1 = -3e^{-x} \cdot (x+1)\Big]_0^1$$

$$= -\frac{6}{e} + 3 = \frac{-6 + 3e}{3}$$

c) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 \cdot e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(0,1,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P, Q y R.

b) (0.75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes.

c) (0.75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0,0,0)$ y los puntos P, Q y R.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $$r \equiv \begin{cases} A(0,0,-1) \\ B(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} A(0,0,-1) \\ \vec{d_r} = (0,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ Q(1,0,1) \\ R(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \left[\overrightarrow{RX}, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\right] = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv z-1=0$$

$$S = r \cap \pi \Longrightarrow -1+\lambda-1=0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow \boxed{S(0,2,1)}$$

b) Piden hallar un punto $T \in r$ de manera que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes, es decir, de forma que $\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PT}\right] = 0 \Longrightarrow T \in \pi$. Por tanto $T = r \cap \pi \Longrightarrow T(0,2,1)$

c) $$V_{OPQR} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-1| = \frac{1}{6}\, u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a) *(0.25 puntos) No le gusten las películas de acción.*

b) *(0.75 puntos) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.*

c) *(0.75 puntos) Le guste el cine de acción y el de suspense.*

d) *(0.75 puntos) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{"Al socio le gustan las películas de acción"}$$
$$S \equiv \text{"Al socio le gustan las películas de suspense"}$$

Vamos a resolver el ejercicio mediante una tabla de contingencia, que es muy adecuada cuando nos dan números en lugar de probabilidades.

	A	$\overline{A}$	**Total**
S	60	75	135
$\overline{S}$	90	75	165
Total	150	150	300

a) $P(\overline{A}) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$

b) $P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = \dfrac{150 + 135 - 60}{300} = \dfrac{225}{300} = \dfrac{3}{4}$

c) $P(A \cap S) = \dfrac{60}{300} = \dfrac{1}{5}$

d) $P(A \cap \overline{S}) = \dfrac{90}{300} = \dfrac{3}{10}$

Junio 2018 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{cases} 10x - 20y - 10z = 8\alpha + 44 \\ 2x - 5y + 3z = 4\alpha + 4 \\ 3x - 7y + 2z = 5\alpha + 9 \end{cases},$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0\ , \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 5\alpha + 9 \end{vmatrix} = (4\alpha + 22) + 5 \cdot (4\alpha + 4) - 5 \cdot (5\alpha + 9)$$
$$= -3 - \alpha = 0 \implies \alpha = -3$$

- Si $\alpha \neq -3 \implies \text{ran}A = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

- Si $\alpha = -3 \implies \text{ran}A = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $\alpha = -3$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 2 & -5 & 3 & -8 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & 5x - 10\cdot(12+5\lambda) - 5\lambda = 10 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & -5y + 25\lambda = -60 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha+4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha+9 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 5F_2 - 2F_1 \\ 5F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha-24 \\ 0 & -5 & 25 & 13\alpha-21 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha+22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha-24 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 \end{array}\right) \Longrightarrow \alpha + 3 = 0 \Longrightarrow \alpha = -3$$

- Si $\alpha \neq -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & \square \\ 0 & -5 & 25 & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $\alpha = -3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $\alpha = -3$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + -2\cdot(12+5\lambda) - \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 5\lambda = 12 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mlilitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) (0.25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).

b) (0.5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $12 + x$ ml de mezcla.

c) (0.5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.

d) (1.25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Cuando $x = 0$ (no se añade alcohol) el precio del perfume será: $48 \cdot 12 = 576$ €

b) El precio del perfume será igual a la cantidad de perfume en mililitros por el precio de cada ml.

$$f(x) = (12 + x) \cdot (48 - 3x) = -3x^2 + 12x + 576$$

c) $f(x) = 0 \implies -3x^2 + 12x + 576 \implies x = \begin{cases} \cancel{x = -12} \\ x = 16 \end{cases}$

d) $f'(x) = 0 \implies -6x + 12 = 0 \implies x = 2$

$f''(x) = -6 \implies f''(2) = -6 < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Mínimo en $x = 2$

Por tanto se produce un máximo en el precio del perfume para $x = 2$ *ml* de alcohol añadido y tiene un valor de $f(2) = 588$ €

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} -x + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ *y el punto* $P(-1, 2, -1)$, *se pide:*

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r *y* s.

b) (0.75 puntos) Hallar la ecuación implícita del planoo que pasa por P *y es paralelo a* r *y a* s.

c) (0.75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P *y el punto* P', *proyección de* P *sobre el plano* $z = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

$$r \equiv \begin{cases} R(-2, -3, 0) \\ \vec{d_r} = (0, 2, -1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(3, -1, 0) \\ \vec{d_s} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1) \end{cases}$$

Solución.

a) $\overrightarrow{RS} = (5, 2, 0)$

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $$\pi \equiv \left[\overrightarrow{PX}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = 0 \implies \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \pi \equiv -(x+1) + (y-2) + 2 \cdot (z+1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x - y - 2z + 1 = 0}$$

c) Para hallar la proyección P' del punto P sobre el plano $\pi' \equiv z = 0$ seguiremos el procedimiento general, aunque proyectar sobre el plano coordenado $z = 0$ se reduce simplemente a sustituir en el punto P la coordenada z por 0, luego $P'(-1, 2, 0)$

$$t \equiv \begin{cases} t \perp \pi' \implies \vec{d_t} = \vec{n}_{\pi'} = (0, 0, 1) \\ P(-1, 2, -1) \in t \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P' = t \cap \pi' \implies -1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies P'(-1, 2, 0)$$

$$Area_{\overset{\triangle}{OPP'}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{OP} \times \overline{OP'}\right| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2} \cdot |(2, 1, 0)|| = \frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.2$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) (0.5 puntos) $P(A \cup B)$

b) (0.5 puntos) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

c) (0.5 puntos) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

d) (0.5 puntos) $P(\overline{A} \cap B)$

e) (0.5 puntos) $P(\overline{A} \mid B)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$P(A) = 0.6 \quad \& \quad P(B) = 0.2 \quad \& \quad P(A \cap B) \overset{\text{A, B indep.}}{=} P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.2 - 0.12 = 0.68$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = 0.88$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$

d) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.12 = 0.08$

e) $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.2 - 0.12}{0.2} = 0.4$