MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2016
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2016
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = (6-x)\cdot e^{x/3}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto) Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Cortes con los ejes`
  - `Eje OX` $\Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (6-x)\cdot e^{x/3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6-x=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6,0) \\ e^{x/3} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$
  - `Eje OY` $\Longrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 6 \Longrightarrow (0,6)$
- `A. Vertical` Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow \nexists$ A. V.
- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (6-x)\cdot e^{x/3} = \lim_{x\to+\infty} (6+x)\cdot e^{-x/3} = [\infty\cdot 0]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6+x}{e^{x/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot e^{x/3}} = 0 \Longrightarrow \underset{x\to-\infty}{\text{A.H.}} \text{ en } y = 0$$

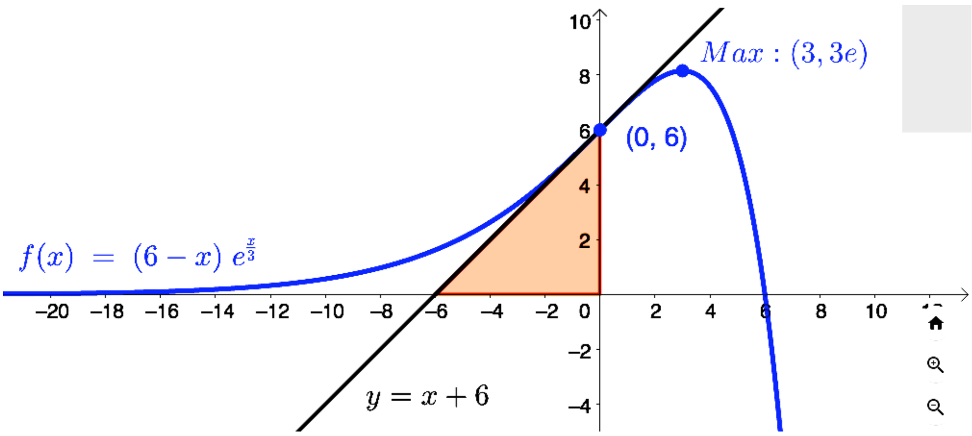
$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (6-x)\cdot e^{x/3} = -\infty \Longrightarrow \nexists \underset{x\to+\infty}{\text{A.H.}}$$

- `A. Oblicua` $\nexists$ A.O.

b) $f'(x) = -e^{x/3} + (6-x)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{x/3} = \left(1-\frac{x}{3}\right)\cdot e^{x/3} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 1-\frac{x}{3} = 0 \Longrightarrow x = 3 \\ e^{x/3} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,3)$ y *decreciente* en $(3,+\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(3,3e)$.



c) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 6 \implies (x_0, y_0) = (0, 6)$
$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 1$
$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 6 = 1 \cdot (x - 0) \implies r \equiv y = x + 6$
La recta $y = x + 6$ corta a los ejes coordenados en los puntos $(0, 6)$ y $(-6, 0)$, con lo que el triángulo perdido tiene un área de $Area = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18\,u^2$
Otra forma de hacerlo es plantear el área como una integral:

$$Area = \int_{-6}^{0} (x + 6)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^{0} = 0 - \left(\frac{36}{2} - 36\right) = 18\,u^2$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ *y* $s \equiv \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$*, se pide:*

a) (1 punto) Obtener la recta que pasa por $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) (1 punto) Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1, 3, 0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -3, 1) \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2, 1, 0) \\ \vec{d_s} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

a) Si la recta $t \perp r$ & $P \in t$ estará contenida en un plano $\pi_1 \perp r$ & $P \in \pi_1$

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} P(1, 0, 5) \\ \vec{n}_{\pi_1} = \vec{d_r} = (2, -3, 1) \end{cases} \implies \left| \begin{array}{l} 2x - 3y + z + D = 0 \xRightarrow{P \in \pi} D = -7 \\ \implies \pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0 \end{array} \right.$$

La recta t pasará por el punto P y por la intersección $Q = r \cap \pi_1$

$$2 \cdot (1+2\lambda) - 3 \cdot (3-3\lambda) + \lambda - 7 = 0 \xRightarrow{\lambda=1} Q(3,0,1)$$

por lo tanto

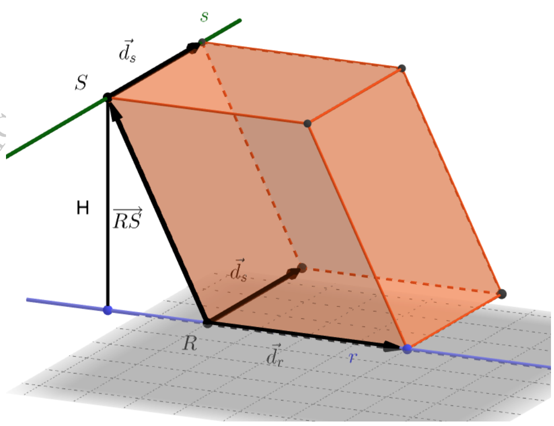
$$t \equiv \begin{cases} P(1,0,5) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,-4) \approx (1,0,-2) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0 \\ z = 5-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Obtenemos el plano $\pi_2 \parallel s$ & $r \in \pi_2$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} R(1,3,0) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (2,-3,1) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (1,-3,1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + 3z - 3 = 0$$

c) Como $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$ las rectas se cruzan en el espacio o se cortan en el plano.

Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan hallaremos la altura del paralelepípedo formado por los vectores directores de ambas rectas y el vector $\overrightarrow{RS}$.



$$Vol_{paralel.} = A_{base} \cdot H \implies H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

Como el volumen del paralelepípedo es $\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|$ y el área de la base es $\left|\vec{d_r} \times \vec{d_s}\right|$ tenemos que:

$$d(r,s) = H = \frac{\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{d_r} \times \vec{d_s}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right\|} = \frac{|2|}{|(0,-1,-3)|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\, u$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) (1 punto) Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde:

$$A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B^2 = C \implies \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha + \beta & -4\alpha \\ 5\alpha + 4\beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 & \Rightarrow \boxed{\beta = -3} \\ -4\alpha = -8 & \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ 5\alpha + 4\beta = -2 & \Rightarrow 10 - 12 = -2 \checkmark \\ -\alpha + \beta = -5 & \Rightarrow -2 - 3 = -5 \checkmark \end{cases}$$

b) $A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}$

$|A| = (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda + 1) - 2\lambda^2 = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \{-1, -1/4\}$

Si $\lambda \neq \{-1, -1/4\} \implies |A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Nº becas a estudiantes de grado universitario"}$$
$$y \equiv \text{"Nº becas a estudiantes de formación profesional"}$$
$$z \equiv \text{"Nº becas a estudiantes de postgrado"}$$

El sistema de ecuaciones será:

$$\begin{cases} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 3 & 494 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-6F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 0 & -7 & -196 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+56+28=115 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-3\cdot 28=-196 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -7z=-196 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}}$$

Septiembre 2016
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea posible.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xRightarrow{Rouche}$ SIST. COMP. INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) - Si $a = 2$, resolvemos el sistema por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 0 - 2\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$, resolvemos el sistema por el método de Cramer ya que es un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{A} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{a^2 - a - 2} = \frac{a \cdot \cancel{(a^2 - a - 2)}}{\cancel{a^2 - a - 2}} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{A} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{a^2 - a - 2} = \frac{-(a-2)^{\cancel{2}}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{-a+2}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{A} = \frac{2a^2 - 5a + 2}{a^2 - a - 2} = \frac{(2a-1) \cdot \cancel{(a-2)}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{2a-1}{a+1}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 3 & 2-a & 4-2a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ (a+1) \cdot F_3 - 3F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(2-a) & (2-a)\cdot(2a-1) \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+1)\cdot(2-a) = 0 \\ \implies a = \{-1, 2\} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1,2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO
- Si $a=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $a=2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior los valores $a=2$ y $a \neq \{-1,2\}$.

- Si $a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -x+0+\lambda=-1 \\ \Rightarrow 3y=0 \\ \Rightarrow z=\lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ \quad y=0 \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ \quad z=\lambda \end{array}}$$

Si $a \neq \{-1,2\}$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(2-a) & (2-a)\cdot(2a-1) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow -x+\frac{2-a}{a+1}+\frac{2a-1}{a+1}=1-a \\ \Rightarrow (a+1)\cdot y=2-1 \\ \Rightarrow (a+1)\cdot(2-a)\cdot z=(2-a)\cdot(2a-1) \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=a \\ y=\frac{2-a}{a+1} \\ z=\frac{2a-1}{a+1} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) *(1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y determinar sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ y calcular $f'(x)$ donde sea posible.*

c) *(1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $x < 0,\ f(x) = \dfrac{1}{5-x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$, luego continua en $x < 0$.
- Si $x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{5+x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{-5\}$, luego continua en $x > 0$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{5-x} = \dfrac{1}{5}$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{5+x} = \dfrac{1}{5}$
  - $f(0) = \dfrac{1}{5+0} = \dfrac{1}{5}$

  Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

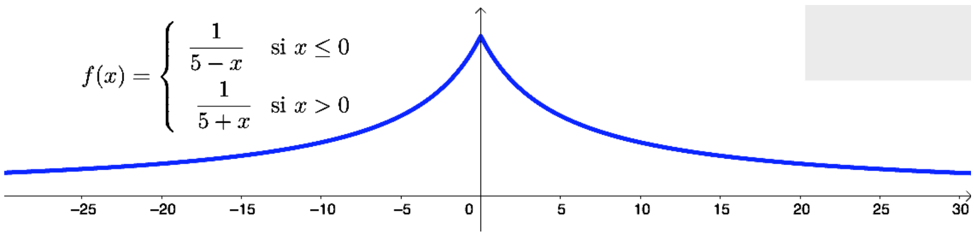
  Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$
- `A. Vertical` Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists\ A.V.$
- `A. Horizontal`
  - $y = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{5-x} = 0 \implies A.H.$ en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$
  - $y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{5+x} = 0 \implies A.H.$ en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$
  - `A. Oblicua` Como $\exists\ A.H. \implies \nexists\ A.O.$

b) Derivabilidad de $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{(5+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

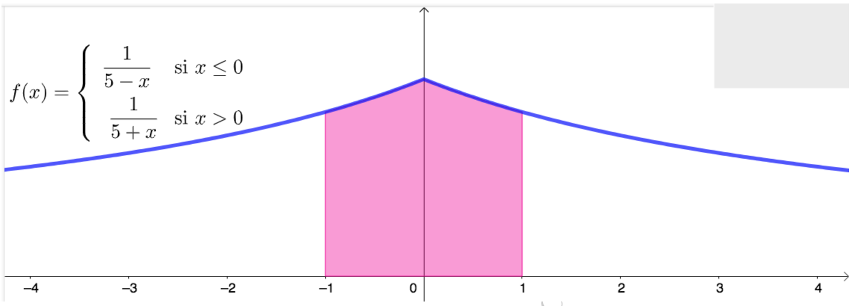
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{1}{25} \\ f'(0^+) = -\dfrac{1}{25} \end{array}\right\} \implies f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.



c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx = -\ln|5-x|\Big]_{-1}^{0} + \ln|5+x|\Big]_{0}^{1}$

$$= -\ln 5 + \ln 6 + \ln 6 - \ln 5 = 2\cdot\ln 6 - 2\cdot\ln 5 = \ln 6^2 - \ln 5^2 = \ln\frac{36}{25}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)*

Solución.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,2,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,-4,-2) \end{cases} \implies \pi \equiv \left[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 4x + 2\cdot(y-2) - 6\cdot(z-1) = 0 \implies \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes coordenados:

$$P = OX \cap \pi \xrightarrow[z=0]{y=0} x = -1/2 \implies P(-1/2, 0, 0)$$

$$Q = OY \cap \pi \xrightarrow[z=0]{x=0} x = -1 \implies Q(0,-1,0)$$

$$R = OZ \cap \pi \xrightarrow[y=0]{x=0} x = 1/3 \implies R(0,0,1/3)$$

$$V_{OPQR} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{36}\,u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + z - 9 = 0$, se pide:

a) *(1 punto) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.*

b) *(1 punto) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

a) Si el plano π_1 pedido es perpendicular a π uno de sus vectores directores será el normal de π. Si ha de contener al eje OX, contendrá a un punto de este ee (el origen de coordenadas por ejemplo) y el vector director de eje será también vector director del plano π_1.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{n}_\pi = (3,3,1) \\ \vec{v} = \vec{d}_{OX} = (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \left[\overrightarrow{OX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv y - 3z = 0$$

b) El punto $P \in \pi$ más cercano al origen de coordenadas se encontrará en una recta $r \perp \pi \mid O \in r$.

$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (3,3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P = r \cap \pi \Longrightarrow 3 \cdot 3\lambda + 3 \cdot 3\lambda + \lambda - 9 = 0 \xrightarrow{\lambda = 9/19} P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$