

MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2016

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2016

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) (0.5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.
- c) (1.5 puntos) Calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

- a) ■ Si $x < 0$, $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$, que es continua en $\{1-x > 0\} - \{1\} = \{x < 1\}$, luego es continua en $x < 0$
- Si $x > 0$, $f(x) = xe^{-x}$, que es continua en $\mathbb{R}$, luego continua en $x > 0$.
- Si $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{0}{1} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} xe^{-x} = 0$
 - $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

b) $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{2}{e^2}$

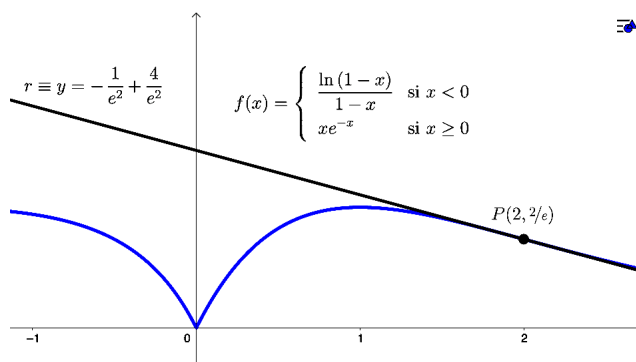
$$f'_2(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{e^2}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2} \cdot (x - 2)$$

$$r \equiv y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$$



c) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx \stackrel{\odot}{=} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln^2(1-x) \right]_{-1}^0 + \left[-(1+x) \cdot e^{-x} \right]_0^1$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \ln^2 2 - \frac{2}{e} + 1$$

$$\odot \int \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(1-x)}_u dx = \frac{1}{2} \cdot \ln^2(1-x) + C$$

$$\odot \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(1-x) \cdot e^{-x} + C$$

————— o —————

Ejercicio 2 (3 puntos)

a) (1.5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot (CD)^{-1} = A + X \cdot (D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Expresa X de la forma más simple posible.

b) (1.5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a)

$$X \cdot \underbrace{(CD)^{-1}}_{D^{-1}C^{-1}} = A + X \cdot (D^{-1}C^{-1} - B)$$

$$\cancel{XD^{-1}C^{-1}} = A + \cancel{XD^{-1}C^{-1}} - XB$$

$$A - XB = 0 \Rightarrow A = XB$$

$$AB^{-1} = X \underbrace{BB^{-1}}_I \Rightarrow \boxed{X = AB^{-1}}$$

$$b) YB = A \Rightarrow Y \underbrace{BB^{-1}}_I = AB^{-1} \Rightarrow Y = AB^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 2 \quad \& \quad \text{Adj} B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj} B^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(*) Nota: Cuando necesitamos operar con la matriz inversa es mucho mejor hacerlo antes de multiplicar todos los elementos de la matriz por $1/2$.

————— o —————

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a , para cada uno de los siguientes supuestos:

- a) (0.5 puntos) Que π_1 y π_2 sean paralelos.
- b) (0.5 puntos) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- c) (1 punto) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

- a) Para que ambos planos sean paralelos $\vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}$ y $\pi_1 \neq \pi_2$

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \\ \& \\ -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

b) $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1/2}$

- c) Sea π_3 el tercero de los planos: $\pi_3 \equiv x - y = 0 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_3} = (1, -1, 0)$.

Hallamos el vector director de la recta $r \equiv \vec{n}_{\pi_1} \cap \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1 + a, -a - 1, a^2 - 1) = (a + 1) \cdot (1, -1, a - 1)$$

$$r \perp \pi_3 \Rightarrow \vec{d}_r \parallel \vec{n}_{\pi_3} \Rightarrow (a + 1) \cdot (1, -1, a - 1) = \lambda(1, -1, 0) \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Pero si $a = -1 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$ y por tanto no habría recta de intersección entre ambos. Por tanto no hay ningún valor $a \in \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones del enunciado.

Otra forma: Si la recta intersección entre π_1 y π_2 es perpendicular a π_3 entonces $(\vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}) \perp \vec{n}_{\pi_3} \Rightarrow (\vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}) \cdot \vec{n}_{\pi_3} = 0 \Rightarrow [\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}, \vec{n}_{\pi_3}] = 0$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a) El plano π que pasa por A , B y C será:

$$A(0, 2, -1) \quad \& \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -5, 1) \quad \& \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2)$$
$$[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9x + 9 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z - 1 = 0$$

■ Hallamos la recta $r \perp \pi$ que pasa por P .

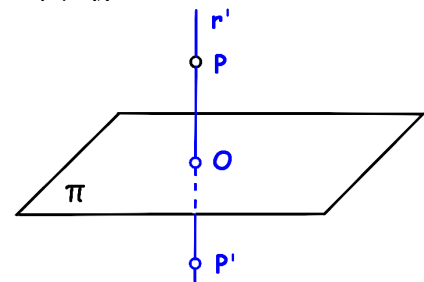
$$r \equiv \begin{cases} P(2, 1, -1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

■ $r \cap \pi \rightarrow O$

$$2 + \lambda - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow O(1, 1, 0)$$

■ $O = M_{\overline{PP'}} = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P$

$P'(0, 1, 1)$



Junio 2016

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (3 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide

- a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m .
- b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 0$.
- c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = m^2 - 4 = 0 \implies m = \{-2, 2\}$$

- Si $m \neq \{-2, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $m = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (\text{\textit{no}} solución)}$$

- Si $m = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^o \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SIST. COMP. INDET. } (\infty \text{ sol.})$$

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$ por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} 2F_3 - 3F_2 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - 7 + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 \\ \Rightarrow 4y - 6 \cdot \frac{7}{2} = 7 \\ \Rightarrow 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 7 \\ z = \frac{7}{2} \end{matrix}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Con los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible, resolvemos por Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & m & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left[\begin{array}{l} F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 4 & m-6 & 7 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} (m+6) \cdot F_3 - 4F_2 \end{array} \right] \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & m^2-4 & 7m-14 \end{array} \right) \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases} \\ \blacksquare \text{ Si } m \neq \{-2, 2\} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMP. DETERMINADO} \\ \blacksquare \text{ Si } m = -2 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. INCOMPATIBLE} \\ \blacksquare \text{ Si } m = 2 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO} \end{aligned}$$

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $m = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -14 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - 7 + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 \\ \Rightarrow 6y - 8 \cdot \frac{7}{2} = 14 \\ \Rightarrow -4z = -14 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = 7 \\ z = \frac{7}{2} \end{matrix}}$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

- (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es paralelogramo.
- (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.
- (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

- a) Sean los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, -1) \quad \& \quad \overrightarrow{AD} = (2, -2, -2)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{los vectores } A, B, C \text{ y } D \text{ son coplanarios}$$

Para demostrar que un cuadrilátero $ABCD$ es paralelogramo tenemos dos opciones:

- Que sus lados sean congruentes dos a dos $\implies \overline{AB} = \overline{DC} \wedge \overline{AD} = \overline{BC}$
- Que sus diagonales se corten en el punto medio. Por tanto vamos a hallar el punto medio de cada una de las diagonales y comprobar si es el mismo:

$$M_{\overline{AC}} = \frac{A + C}{2} = (1, 9/2, 5/2) \quad \& \quad M_{\overline{BD}} = \frac{B + D}{2} = (1, 9/2, 5/2)$$

Por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

$$\text{b) } S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right| = |(0, 2, -2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \, u^2$$

- c) Nos piden $r \perp \pi$ formado por los puntos A, B, C y D que pasa por su centro.

$$\pi \equiv [\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv y - z - 2 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} M_{\overline{AC}} = (1, 9/2, 5/2) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (0, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 9/2 + \lambda \\ z = 5/2 - \lambda \end{cases}$$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

a) (1 punto) Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x) dx = 5, \quad \int_0^2 g(x) dx = 14$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$\text{a) } f''(x) = \int f'''(x) dx = \int 12 dx = 12x + C \xrightarrow{f''(1)=4} C = -8 \implies f''(x) = 12x - 8$$

$$f'(x) = \int f''(x) dx = 6x^2 - 8x + C \xrightarrow{f'(1)=1} C = 3 \implies f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = 2x^3 - 4x^2 + 3x + C \xrightarrow{f(1)=3} C = 2 \implies \boxed{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{b) } g''(x) = 6 \implies g'(x) = \int g''(x) dx = 6x + C$$

$$g(x) = \int g'(x) dx = 3x^2 + Cx + K$$

$$\int_0^1 g(x) dx = 5 \implies \left[x^3 + \frac{C}{2}x^2 + Kx \right]_0^1 = 1 + \frac{C}{2} + K = 5 \implies C + 2K = 8$$

$$\int_0^2 g(x) dx = 14 \implies \left[x^3 + \frac{C}{2}x^2 + Kx \right]_0^2 = 8 + 2C + 2K = 14 \implies C + K = 3$$

$$\begin{cases} C + 2K = 8 \\ C + K = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} C = -2 \\ K = 5 \end{cases} \implies \boxed{g(x) = 3x^2 - 2x + 5}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \cdot \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \cdot \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -x \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -1 - \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) ■ Continuidad en $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\bullet f(0) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ la función $f(x)$ es *continua* en $x = 0$.

■ Continuidad en $x = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x \ln x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0$$

$$\bullet f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ la función $f(x)$ es *continua* en $x = 1$.

■ Derivabilidad en $x = 0$ & $x = 1$

■ Continuidad en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 1 - \ln 0 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es} \\ \text{derivable} \\ \text{en } x = 0 \end{array}$$

■ Continuidad en $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -1 - \ln 1 = -1 \\ f'(1^+) = 1 + \ln 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es} \\ \text{derivable} \\ \text{en } x = 1 \end{array}$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.