MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2016

- Ordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2016 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ *y* $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$ *, se pide:*

a) *(1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.*

b) *(1.5 puntos) Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a* r_1 *y a* r_2*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} R_1(-1, 2, 0) \\ \vec{d}_{r_1} = (1, -3, 1) \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} R_2(4, -3, 0) \\ \vec{d}_{r_2} = (5, 4, 1) \end{cases}$$

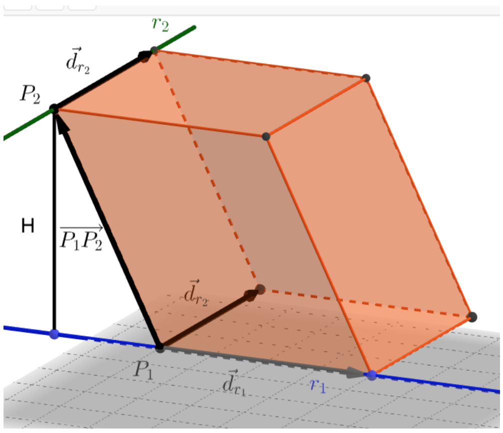
$$\overrightarrow{R_1R_2} = (5, -5, 0)$$

a) $$\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{R_1R_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

$$Vol = A_{base} \cdot H \Rightarrow d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\left|\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{R_1R_2}\right]\right|}{\left|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}\right|} = \frac{|-55|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}\right|}$$

$$= \frac{55}{|(-7, 4, 19)|} = \frac{55}{\sqrt{426}}\, u$$



b) La recta s que pasa por $O(0,0,0)$ y corta a r_1 y a r_2:
- Si la recta s corta a r_1 y $O \in s$, estará en un plano π_1 que contenga a O y a r_1.
- Si la recta s corta a r_2 y $O \in s$, estará en un plano π_2 que contenga a O y a r_2.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_{r_1} = (1, -3, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OR_1} = (-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x + y + z = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d}_{r_2} = (5, 4, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OR_2} = (4, -3, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 3x + 4y - 31z = 0$$

De esta forma la recta s pedida será la intersección de ambos planos:

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - 31z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) (1 punto) Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1.5 puntos) Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0.5 puntos) Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a = \pm 1 \end{array} \right.$$

b) $$AXA^{-1} = B \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} X \underbrace{A^{-1}A}_{I} = A^{-1}BA \implies X = A^{-1}BA$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -2 \quad \& \quad \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} \implies A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$|B| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\left|2B^{-1}\right| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{2^3 \cdot |B|} = \frac{1}{8 \cdot |B|} = \frac{1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta* 600 *euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es* 2 *euros, venderían* 5000 *papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán* 500 *papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?*
> *Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean x el precio de la papeleta y $f(x)$ la recaudación de la rifa. Hemos de encontrar el beneficio máximo teniendo en cuenta:

- El coste del portátil que se rifará es de 600 euros.
- Si $x = 2$ se venderían 5000 papeletas.
- Por cada incremento de 1 euro en el precio se venden 500 papeletas menos. Luego se reducirá el número de papeletas vendidas en $500 \cdot (x-2)$.

Por tanto el número de papeletas vendidas será $5000 - 500 \cdot (x-2) = 6000 - 500x$
Y la recaudación $f(x)$ será el número de papeletas vendidas por el precio de cada papeleta:

$$f(x) = (6000 - 500x) \cdot x = -500x^2 + 6000x$$

Para hallar el máximo de la función:

$$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \implies x = 6$$
$$f''(x) = -1000 \implies f''(6) = -1000 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } x = 6$$

Luego la máxima recaudación se obtendrá vendiendo las entradas a un precio de 6 euros y ascenderá a $f(6) = 18000$ euros.
Si descontamos el coste del ordenador rifado se podrá donar a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ *y* $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, *definida para* $x \neq -1$. *Se pide:*

a) (1.5 puntos) Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \cdot g(x)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $h(x) = f(x) - g(x) = 2 + x - x^2 - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{-x^3 + 3x}{x+1}$

$$h(x) = 0 \implies -x^3 + 3x = x \cdot (-x^2 + 3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

El área del primer cuadrante será por tanto:

$$Area = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-x^3 + 3x}{x+1}\, dx \overset{\odot}{=} \int_0^{\sqrt{3}} \left(-x^2 + x + 2\right) dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2}{x+1}\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 2 \cdot \ln|x+1| \Big]_0^{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} - 2 \cdot \ln\left|\sqrt{3} + 1\right|$$

$$\approx 1,22\ u^2$$

$$\odot \qquad \begin{array}{r|l} -x^3 + 3x & x+1 \\ x^3 + x^2 & -x^2 + x + 2 \\ \hline x^2 + 3x & \\ -x^2 - x & \\ \hline 2x & \\ -2x - 2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

b) $$\lim_{x \to -1} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{4 + 2x - 2x^2}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -1} \frac{-2 \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x-2)}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -1} -2 \cdot (x - 2) = 6$$

Junio 2016 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ ax + 4y + 2z = a \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0.5 puntos) "Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -5a^2 + a + 6 = -(a+1)\cdot(5a-6) = 0 \implies a = \{-1, 6/5\}$$

- Si $a \neq \{-1, 6/5\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 6/5 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6/5 & 0 \\ 4 & 2 & 6/5 \end{vmatrix} = -\frac{66}{25} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche} \textsc{Sist. Incompatible} \text{ (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.D. también podríamos haber optado por el método de Crámer, con la ventaja de conocer que $|A| = -5a^2 + a + 6 = 2$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda = 1 \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow x - 0 + 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \frac{-1-\lambda}{5} - \lambda = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y + \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1+6\lambda}{5} \\ y = \frac{-1-\lambda}{5} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 4 & 2 & a & a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 6 & 5a & a \end{array}\right) \overset{a \neq -1}{\sim} \begin{bmatrix} \\ \\ (a+1) \cdot F_3 - 6F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+1) \cdot (5a-6) & a \cdot (a+1) \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+1) \cdot (5a-6) = 0 \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 6/5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 6/5\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

- Si $a = {}^6/_5 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & {}^6/_5 & 0 \\ 0 & {}^{11}/_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$ y $C_1 \leftrightarrow C_2$, las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas y, z, x.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -y + 1 - 1 = 0 \\ \Rightarrow 2z + 2 \cdot (-1) = 0 \\ \Rightarrow -2x = 2 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = -1 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor $a = -1$ en el sistema obtenido antes de la última operación de filas (sólo válida si $a \neq -1$). Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$ y $C_1 \leftrightarrow C_2$, las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas y, z, x.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -y + \lambda - \frac{1+6\lambda}{5} = 0 \\ \Rightarrow 6\lambda - 5x = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y = \frac{-1-\lambda}{5} \\ z = \lambda \qquad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ x = \frac{1+6\lambda}{5} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x-4} + 2x - 1 & ,\ si\ x \neq 2 \\ 0 & ,\ si\ x = 2 \end{cases}$*, se pide:*

a) (1 punto) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución. Reescribimos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 10x + 13}{2 \cdot (x-2)} & ,\ \text{si } x \neq 2 \\ 0 & ,\ \text{si } x = 2 \end{cases}$$

a)
- `A. Vertical` Buscamos las A. Verticales entre las raíces del denominador.
  - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 10x + 13}{2x-4} = \left[\dfrac{9}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{9}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{9}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A. Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x^2 - 10x + 13}{2x-4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2 - 10x + 13}{2x^2 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - mx\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2 - 10x + 13}{2x-4} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 10x + 13 - \cancel{4x^2} + 8x}{2x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x+13}{2x-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = 2x - 1$

b) Hallamos los puntos singulares

$$f'(x) = \frac{(8x-10)\cdot 2 \cdot (x-2) - (4x^2 - 10x + 13)\cdot 2}{4\cdot (x-2)^2} = \frac{16x^2 - 52x + 40 - 8x^2 + 20x - 26}{4\cdot(x-2)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 32x + 14}{4\cdot(x-2)^2} = \frac{\cancel{2}\cdot(4x^2 - 16x + 7)}{\cancel{4}^2\cdot(x-2)^2} = \frac{4x^2 - 16x + 7}{2\cdot(x-2)^2} = 0 \implies \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 7/2 \end{cases}$$

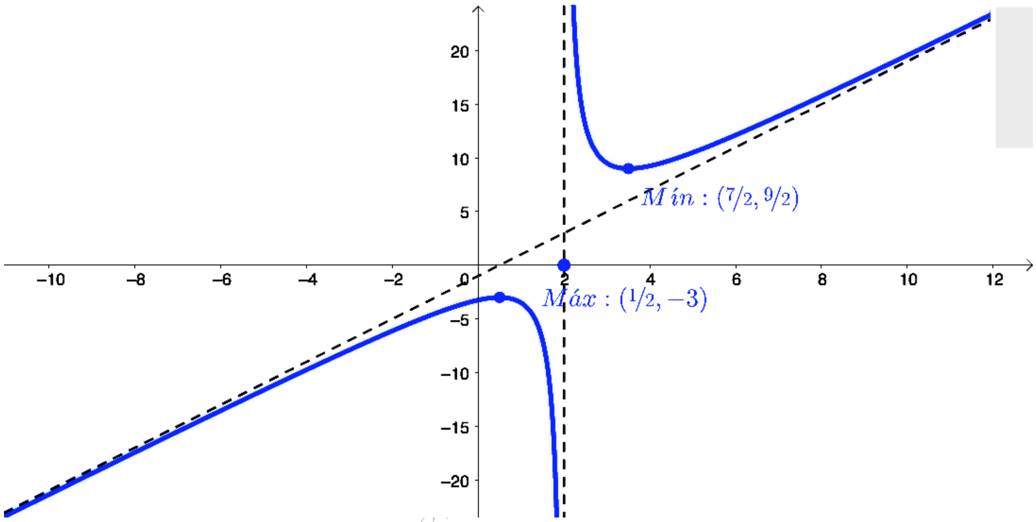
	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 7/2)$	$(7/2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Luego la función $f(x)$ es *creciente* en $(1/2, 7/2)$ y *decreciente* en $(-\infty, 1/2) \cup (7/2, +\infty)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(1/2, -3)$ y un *máximo relativo* en $(7/2, 9)$.

$$f''(x) = \frac{(8x-16)\cdot 2\cdot (x-2)^{\cancel{2}} - (4x^2-16x+7)\cdot 4\cdot \cancel{(x-2)}}{4\cdot (x-2)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{\cancel{16x^2} - \cancel{64x} + 64 - \cancel{16x^2} + \cancel{64x} - 28}{4\cdot (x-2)^3} = \frac{\cancel{36}\ 9}{\cancel{4}\cdot (x-2)^3} = \frac{9}{(x-2)^3} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ P.I.}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$



Para el cálculo de la integral utilizaremos la función tal y como nos la dieron en el enunciado, ya que de esta forma es más sencilla su integración.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{9}{2x-4} + 2x - 1\right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{9}{2x-4}\,dx + \int_{-1}^{1} (2x-1)\,dx$$

$$= 9\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{2}{2x-4}}_{\frac{u'}{u}}\,dx + x^2 - x\Big]_{-1}^{1} = \frac{9}{2}\cdot \ln|2x-4| + x^2 - x\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\cdot \ln|-2| + 1 - 1\right) - \left(\frac{9}{2}\cdot \ln|-6| + 1 + 1\right) = \frac{9}{2}\cdot (\ln 2 - \ln 6) - 2$$

$$= \frac{9}{2}\ln\frac{2}{6} - 2 = \frac{9}{2}\cdot \ln\frac{1}{3} - 2 = -\frac{9}{2}\cdot \ln 3 - 2 \simeq -6.94$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z+3=0$, *el punto* $A(1,1,3)$ *y la recta* $r \equiv x = y-2 = \dfrac{z}{2}$, *se pide.*

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto A *a la recta* r.

b) (1 punto) Hallar la proyección del punto A *sobre el plano* π.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(0,2,0) \\ \vec{d_r} = (1,1,2) \end{cases} \qquad \& \quad A(1,1,3) \quad \& \quad \overrightarrow{RA} = (1,-1,3)$$

a) $$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{RA} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|(-5,1,2)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}\ u$$

b) Hallaremos una recta $s \perp \pi$, que pase por el punto A. La proyección $A' = s \cap \pi$.

$$s \equiv \begin{cases} A(1,1,3) \\ \vec{d_s} = \vec{n}_\pi = (1,-1,2) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

Sea $A'(1+\lambda, 1-\lambda, 3+2\lambda)$ el punto de intersección $s \cap \pi$

$$(1+\lambda) - (1-\lambda) + 2\cdot(3+2\lambda) + 3 = 0 \implies 9 + 6\lambda = 0 \xRightarrow{\lambda=-3/2} \boxed{A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dada una recta r cuyo vector director es $\vec{v}=(a,b,c)$, con a, b, $c>0$, se pide:

a) (1.5 puntos) Si r forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\dfrac{\pi}{4}$ con el eje OY, determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) (0.5 puntos) Si $\vec{v}=(1,5,3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3,0,1)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Sean los vectores directores de los ejes:

$$\vec{d}_{OX}=(1,0,0) \qquad \& \qquad \vec{d}_{OY}=(0,1,0) \qquad \& \qquad \vec{d}_{OZ}=(0,0,1)$$

y sea $\vec{d}_r=(a,b,c)$ que suponemos unitario $\implies \left|\vec{d}_r\right|=1$

$$\cos\left(\widehat{r,OX}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\left|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_{OX}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_{OX}\right|}=\frac{|a|}{1\cdot\sqrt{1}} \implies \frac{1}{2}=a$$

$$\cos\left(\widehat{r,OY}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_{OY}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_{OY}\right|}=\frac{|b|}{1\cdot\sqrt{1}} \implies \frac{\sqrt{2}}{2}=b$$

$$\left|\vec{d}_r\right|=1 \implies \sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \implies \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+c^2} \implies \frac{3}{4}+c^2=1 \implies c=\frac{1}{2}$$

luego el vector director de r será $\vec{d}_r=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\left(\widehat{r,OZ}\right)=\frac{\left|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_{OZ}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_{OZ}\right|}=\frac{|c|}{1\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2} \implies \left(\widehat{r,OZ}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Otra forma de resolver el ejercicio supone saber que si α, β, γ son los ángulos que forma un vector con los ejes coordenados se cumple que:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\gamma=1 \implies \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

$$\implies \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\gamma=1 \implies \cos\gamma=\frac{1}{2} \implies \gamma=\frac{\pi}{3}$$

b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta cuyo vector director es $\vec{v}=(1,5,3)$ y que pasa por el punto $A(3,0,1)$.

$$\pi\equiv\begin{cases}A(3,0,1)\\ \vec{n}_\pi=\vec{v}=(1,5,3)\end{cases} \Rightarrow x+5y+3z+D=0 \overset{A\in r}{\Longrightarrow} D=-6 \Rightarrow \pi\equiv x+5y+3z-6=0$$