UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Examen-Modelo para el curso **2014-2015**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los valores de m.
b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A^{20}.
c) (0,75 puntos) Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.
d) (0,75 puntos) Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el dominio de $f(x)$.
b) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
c) (1,5 puntos) El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.

Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 1, \\ y = z, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $P_1(1, -1, 2)$, $P_2(2, -3, 0)$ y $P_3(3, 1, 2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.
b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.
c) (1 punto) Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados el punto $P(1,2,-1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=4\,, \\ x-y-3z=-2\,, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=2\,, \\ y=-3\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la mínima distancia entre r y s.
b) (1 punto) Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.
c) (1 punto) Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Hallar:

a) (1 punto) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$.
b) (1 punto) $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\, dx$.
c) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x)=\frac{ex-e^x}{x}\,.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1,5 puntos) Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (0,5 puntos) Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + y = 0\,, \\ x + my = 0\,, \\ mx + my = 0\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutirlo según los valores de m.
b) (0,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.