MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2015
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.*

b) *(1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $\left(B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right)^3$*

Nota: *$A^\top$ denota la matriz traspuesta de A, I es la matriz identidad de orden 2.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = A \xRightarrow{\odot} A^{15} = A$

$|A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$

b) $$B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A^\top} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2I}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right)^3\right| = \left|B \cdot A^\top \cdot B^{-1} - 2I\right|^3 = 2^3 = 8$$

$\odot$ Método de Inducción

Caso Base: $A^2 = A$
Hipótesis de Inducción: $A^k = A$
Paso Inductivo: $A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite del tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de aceite } A \ (\ell)\text{”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de aceite } B \ (\ell)\text{”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \leq 12000 & \rightarrow (0, 12000) \quad \& \quad (12000, 0) \\ ② \ x \geq 2000 & \rightarrow (2000, 0) \\ ③ \ y \geq 2000 & \rightarrow (0, 2000) \\ ④ \ 3x + 2y \leq 3000 & \rightarrow (0, 1500) \quad \& \quad (1000, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

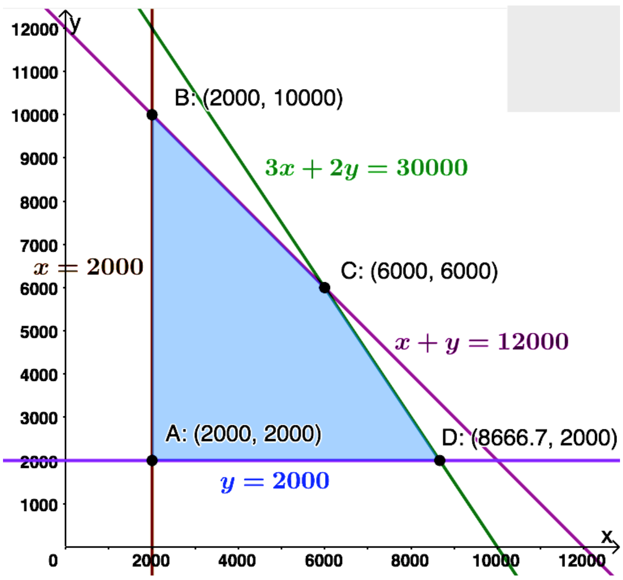
- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = (0.25 \cdot 3)x + (0.3 \cdot 2)y = 0.75x + 0.6y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2000	2000	2700
B	2000	10000	7500
C	6000	6000	8100
D	8667	2000	7700

El *beneficio máximo* es de 8100 euros y se produce comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2,\ a \in \mathbb{R}$$

a) *(1 punto) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.*

b) *(1 punto) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

a) Si la función tiene un mínimo en $x = 1/2 \implies f'(1/2) = 0 \quad \& \quad f''(1/2) > 0$

$$f'(x) = 12x^2 - 2ax - a \implies f'(1/2) = 3 - 2a = 0 \implies a = 3/2$$
$$f''(x) = 24x - 3 \implies f''(1/2) = 9 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{mínimo en } x = 1/2$$

b) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(4x^3 - 2x^2 - 2x + 2\right) dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\Big]_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.09 \quad \& \quad P(B) = 0.07 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.97$$

Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) (1 punto) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

b) (1 punto) Calcúlese $P(A \cap B \mid C)$.

Nota: *$\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

Reunimos los datos del enunciado:

$$P(A) = 0.09 \quad \& \quad P(B) = 0.07 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.97 \quad \& \quad P(A \cap C) \underset{incomp.}{\overset{A \text{ y } C}{=}} 0$$

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.97 = 0.03$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.03 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.09 \cdot 0.07 = 0.0063 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ \text{A y B no son independientes} \end{cases}$$

b) $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \overset{\circledast}{=} \dfrac{0}{P(C)} = 0$

$\circledast$ Como $P(A \cap C) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) (1 punto) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2.35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Cantidad de fruta (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = \dfrac{16000}{100} = 160$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (158.04; 161.96)}$$

b) $n = 64 \quad \& \quad E = 2.35 \quad \& \quad 1-\alpha = ?$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 2.35 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{64}} \implies z_{\alpha/2} = 1.88$$

$$z_{\alpha/2} = 1.88 \xRightarrow{Tabla} 1-\alpha/2 = 0.9699 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0301 \Rightarrow \alpha = 0.602 \Rightarrow \boxed{1-\alpha = 0.9398}$$

Septiembre 2015
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+az=a+1 \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+az=a \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema para $a=2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2 \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$$\text{ran}(A) = 1 \neq \text{ran}(A^*) = 2 \xrightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 2 \cdot 2 = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 3 \cdot 2 = -5 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -6 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) *(1 punto) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.*

b) *(1 punto) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = -16x + 24 = 0 \implies x = 3/2$

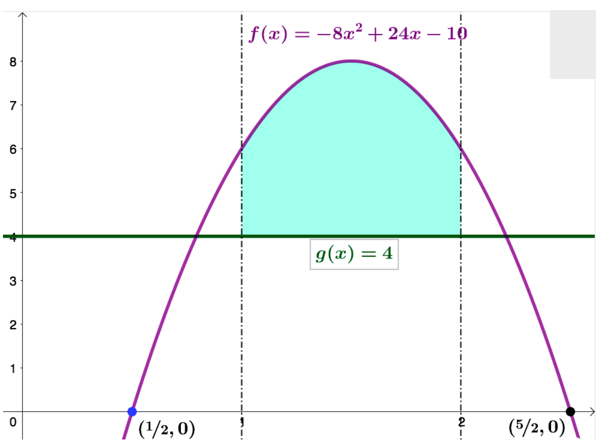
$f''(x) = -16 \implies f''(3/2) = -16 < 0 \xrightarrow{(\cap)}$ Máximo en $(3/2, 8)$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: $(0, 10)$ & $(5/2, 0)$ & $(1/2, 0)$.

b) $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$ & $g(x) = 4$

$h(x) = f(x) - g(x) = -8x^2 + 24x - 14$

$$\begin{aligned} Area &= \int_1^2 h(x)\,dx \\ &= \int_1^2 \left(-8x^2 + 24x - 14\right) dx \\ &= -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x \Big]_1^2 \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{10}{3}\ u^2 \end{aligned}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) (1 punto) Determínense las asíntotas de esta función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = e^x$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1$, que es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1$
  - $f(0) = \dfrac{0^3}{(0-2)^2} + 1 = 1$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b)
- `A. Vertical` En $f_1(x)$ no hay A. Vertical, buscamos las de $f_2(x)$ entre las raíces del denominador. $x - 2 = 0 \implies x = 2$

  $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \left[\frac{8}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \left[\dfrac{8}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \left[\dfrac{8}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

  $$y = \lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \implies \underset{x \to -\infty}{A.H.} \text{ en } y = 0$$

  $$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty \implies \nexists \underset{x \to +\infty}{A.H.}$$

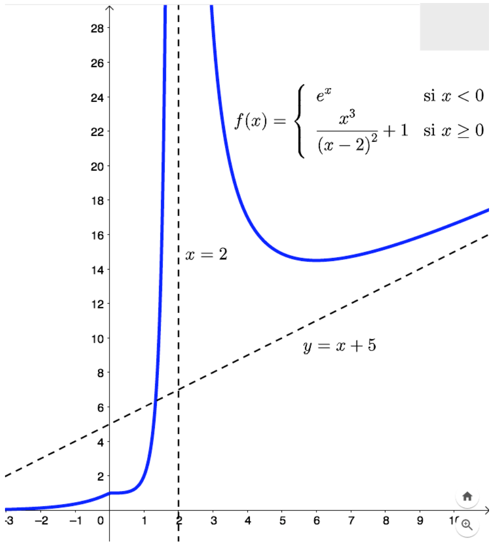
- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 8x + 4}{(x-2)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 5$$

Luego hay una $\underset{x\to+\infty}{A.O.}$ en $y = x + 5$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es 3/4. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) (1 punto) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ "El trabajador es puntual"
$T \equiv$ "El trabajador se desplaza en transporte público"

$$P(P) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(T \mid \overline{P}) = \frac{1}{2}$$

a) $P(T \mid \overline{P}) = \dfrac{P(T \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{1}{2} \implies P(T \cap \overline{P}) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{8} = 0.125$

b) $P(\text{Al menos uno sea puntual}) = 1 - P(\text{Ninguno sea puntual}) = 1 - P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3})$

$$= P(\overline{P_1}) \cdot P(\overline{P_2}) \cdot P(\overline{P_3}) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= 0.9844$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) (1 punto) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) (1 punto) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Gasto familiar en gas (€)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 75)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 15 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} < 15 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{75}{15}\right)^2 = 96.04 \implies \boxed{n = 97}$$

b) $X : \mathcal{N}(250, 75) \xrightarrow{n=81} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(250, \frac{75}{\sqrt{81}} = 8.33\right)$

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230-250}{8.33}\right) = P(Z \geq -2.4) = P(Z \leq 2.4) = 0.9918$$