MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2014
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2014
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a) Vamos a discutir el sistema por el método de Gauss, para lo cual escribiremos el mismo en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto para que el sistema sea incompatible: $3\lambda - 3 \neq 0 \implies \boxed{\lambda \neq 1}$

b) Para $\lambda = 1$ el sistema queda:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - \lambda + \mu = -1 \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda - \mu - 1}{2} \\ \quad y = \lambda \qquad , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \quad z = \mu \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x \cdot (x-2)}$$

a) (1 punto) Determínense las asíntotas de f.

b) (1 punto) Estúdiese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a) ▪ `A. Horizontal`

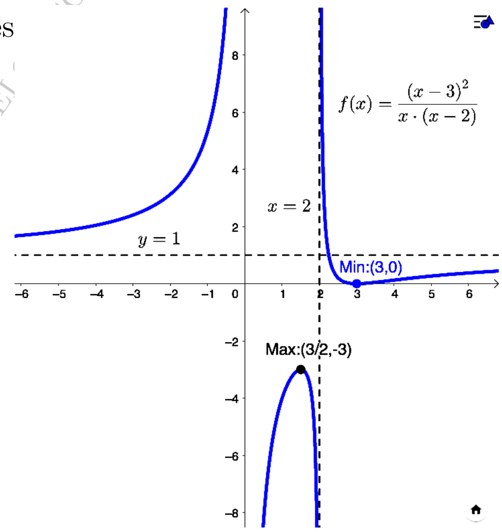
$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x \cdot (x-2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1 \implies A.H. \text{ en } y = 1$$

▪ `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre los puntos que no pertenecen a Dom(f).

$$x \cdot (x-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$

▪ $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$



b) $$f'(x) = \frac{2\cdot(x-3)\cdot x\cdot(x-2) - (x-3)^2\cdot(2x-2)}{x^2\cdot(x-2)^2} = \frac{2\cancel{x}\cdot(x-3)\cdot(2x-3)}{x^{\cancel{2}}\cdot(x-2)^2}$$

$$= \frac{2\cdot(x-3)\cdot(2x-3)}{x\cdot(x-2)^2} = 0 \implies 2\cdot(x-3)\cdot(2x-3) = 0 \implies x = \{3/2, 3\}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3/2)$	$(3/2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2) \cup (3, +\infty)$ y *decreciente* en $(3/2, 2) \cup (2, 3)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(3, 0)$ y un *máximo relativo* en $(3/2, -3)$.

Como $f'(4) = \dfrac{5}{8} > 0$, en un entorno de $x = 4$ la función $f(x)$ es *creciente.*

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

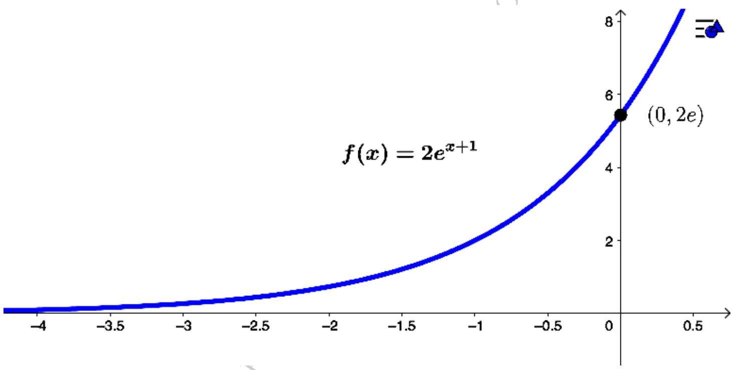
a) (1 punto) Esbócese la gráfica de la función f.

b) (1 punto) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ *y* $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- El único punto de corte con los ejes es $(0, 2e)$.
- $\nexists$ $A.V.$ y la única $A.H.$ es $y = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x+1} = 0 \implies \underset{x \to -\infty}{A.H.}$ en $y = 0$.
- $f'(x) = 2e^{x+1} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es *creciente* en su dominio.



b) $f(x) = 2e^{x+1} = 0 \implies \nexists$ puntos de corte con OX. lo que define un único recinto de integración $(0, 1)$.

$Area = \int_0^1 2e^{x+1}\, dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e^2 - 2e \simeq 9.34 \; u^2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de animal”} \\ P_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de persona”} \\ T_i &\equiv \text{“El alumno } i \text{ tiene un papel de árbol”} \\ M &\equiv \text{“A los dos primeros alumnos les toca el mismo papel”} \end{aligned}$$

a) $$\begin{aligned} P(M) &= P\Big((A_1 \cap A_2) \cup (P_1 \cap P_2) \cup (T_1 \cap T_2)\Big) = P(A_1 \cap A_2) + P(P_1 \cap P_2) + P(T_1 \cap T_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) + P(P_1) \cdot P(P_2 \mid P_1) + P(T_1) \cdot P(T_2 \mid T_1) \\ &= \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} = \frac{30}{77} = 0.3896 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3) &= P(\overline{P}_1) \cdot P(\overline{P}_2 \mid \overline{P}_1) \cdot P\Big(P_3 \mid (\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2)\Big) = \frac{19}{22} \cdot \frac{18}{21} \cdot \frac{3}{20} \\ &= \frac{171}{1540} \simeq 0.111 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) *(1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Estatura de los varones (cm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=625} \overline{x} = 169$

$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{16}{\sqrt{625}} = 1.488$

$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (167.51; 170.49)}$

b) $n =? \qquad \& \qquad E < 4 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$]E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \dfrac{16}{\sqrt{n}} < 4 \implies n > \left(1.645 \cdot \dfrac{16}{4}\right)^2 = 43.29 \implies \boxed{n = 44}$

Septiembre 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese $\left(A \cdot A^{\top}\right)^{200}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a) $A \cdot A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \cdot A^{\top}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{\top}$$

$$\left(A \cdot A^{\top}\right)^{200} = A \cdot A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot A^{\top} - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(A \cdot A^{\top} - 3I\right)^{-1} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\odot$*Nota:* Sea la matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4 \quad \& \quad y \leq x - 1 \quad \& \quad 2y \geq x \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlene las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténgase los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

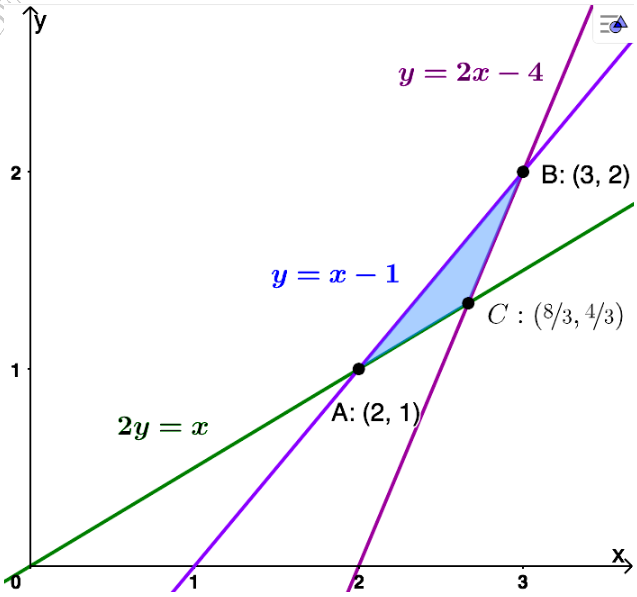
$$\begin{cases} ① \; y \leq 2x - 4 & \rightarrow (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ ② \; y \leq x - 1 & \rightarrow (0,-1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; 2y \geq x & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (4,2) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	1	-1
B	3	2	-3
C	$8/3$	$4/3$	$-4/3$



El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -3 y se produce en el punto $B : (3,2)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de -1 y se produce en el punto $A : (2,1)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_0^2 f(x)\,dx$ para $\lambda = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

a)
- Sea $s \equiv y = 2x - 3$. Como $r \parallel s \implies m_r = m_s = 2$
- $f'(x) = \dfrac{\lambda \cdot (4 + x^2) - \lambda x \cdot 2x}{(4 + x^2)^2} = \dfrac{\lambda \cdot (4 - x^2)}{(4 + x^2)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(-1) \implies 2 = \dfrac{3\lambda}{25} \implies \boxed{\lambda = {}^{50}/_{3}}$

b) $$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \underbrace{\frac{2x}{4 + x^2}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(4 + x^2\right)\Big]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln 8 - \ln 4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{8}{4} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln\sqrt{2} \simeq 0.3466$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan, sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) *(1 punto) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.*

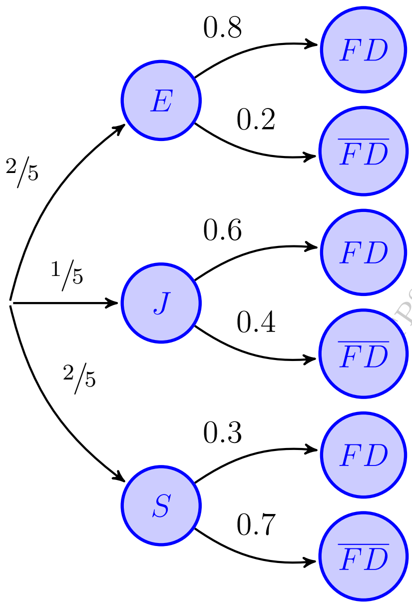
b) *(1 punto) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$E \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Educación”}$$
$$J \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Justicia”}$$
$$S \equiv \text{“El jubilado es trabajdor de Sanidad”}$$
$$FD \equiv \text{“Al trabajador le hacen una fiesta de despedida”}$$



Sean: $P(J) = p \quad \& \quad P(E) = P(S) = 2p$

$P(E) + P(S) + P(J) = 2p + 2p + p = 1 \implies p = 1/5$

a) $P(FD) = P\Big((E \cap FD) \cup (J \cap FD) \cup (S \cap FD)\Big)$
$= P(E \cap FD) + P(J \cap FD) + P(S \cap FD)$
$= P(E) \cdot P(FD \mid E) + P(J) \cdot P(FD \mid J)$
$+ P(S) \cdot P(FD \mid S) = \dfrac{2}{5} \cdot 0.8 + \dfrac{1}{5} \cdot 0.6$
$+ \dfrac{2}{5} \cdot 0.3 = 0.56$

b) $P(S \mid \overline{FD}) = \dfrac{P(S \cap \overline{FD})}{P(\overline{FD})} = \dfrac{P(S) \cdot P(\overline{FD} \mid S)}{1 - P(FD)}$
$= \dfrac{2/5 \cdot 0.7}{1 - 0.56} = 0.6363$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3.290 y y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera el 95 % y el error máximo fuera de 7.84.
Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la pobaciión y los tamaños muestrales respectivos.
Nota: *Utilícese* $z_{0.05} = 1.645$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2014 - Opción B)

Solución.

Llamamos n_1 y n_2 los tamaños muestrales mínimos

$n_1 =?$ & $E = 3.29$ & $1-\alpha = 0.9$
$1-\alpha = 0.8 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}\!/_2 = 0.9 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = 3.29$$

$$\Longrightarrow n_1 = \left(1.645 \cdot \frac{\sigma}{3.29}\right)^2 = 0.25\sigma^2$$

$n_2 =?$ & $E = 7.84$ & $1-\alpha = 0.95$
$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}\!/_2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = 7.84$$

$$\Longrightarrow n_2 = \left(1.96 \cdot \frac{\sigma}{7.84}\right)^2 = 0.0625\sigma^2$$

$$n_1 = n_2 + 7500 \Longrightarrow 0.25\sigma^2 = 0.0625\sigma^2 + 7500 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 200}$$

$$n_1 = 0.25 \cdot 200^2 \Longrightarrow \boxed{n_1 = 10000} \quad \& \quad n_2 = 0.0625 \cdot 200^2 \Longrightarrow \boxed{n_2 = 2500}$$