MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2023

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2023
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Calcule A^{-1} para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1} \; \forall a \neq -1$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = (1+1)^2 = 4 \quad \& \quad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta grande (miles de km)”}$$
$$y \equiv \text{“Distancia recorrida por la furgoneta mediana (miles de km)”}$$

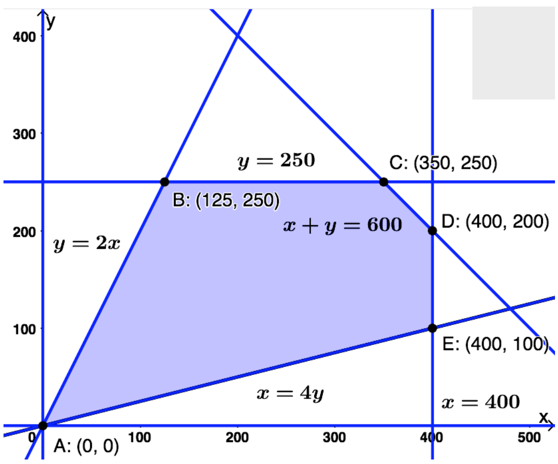
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq 400 & \to (400,0) \\ ② \ y \leq 250 & \to (0,250) \\ ③ \ x+y \leq 600 & \to (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ ④ \ y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (300,6000) \\ ⑤ \ x \leq 4y & \to (0,0) \quad \& \quad (150,600) \\ x,y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 0.1x + 0.05y$ (en miles de €)

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	125	250	25
C	350	250	47.5
D	400	200	50
E	400	100	45

El *máximo beneficio* es de 50000 €, cuando la furgoneta grande recorre 400000 km y la mediana 100000 km.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Representa la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinaación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.*

b) *(1 punto) Represente la gráfica de $g(x) = f(x-3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a)
- `Cortes con los ejes:` Intentamos hallar los puntos de corte con el eje de abscisas por el método de Ruffini pero no encontramos ningún valor entero que complete el algoritmo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}$$

  El punto de corte con OY será: $(0, f(0)) = (0, 1)$

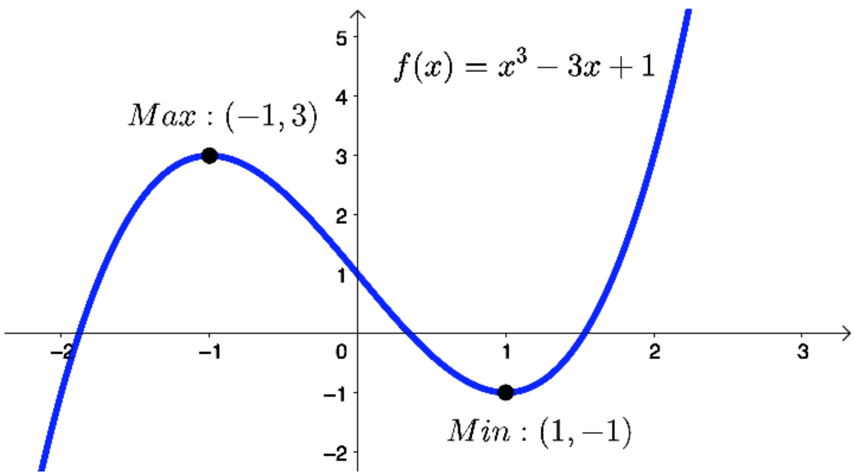
- `Extremos relativos:` $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

  La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1, -1)$ y un *máximo relativo* en $(-1, -3)$.

- `Curvatura:` $f''(x) = 6x$

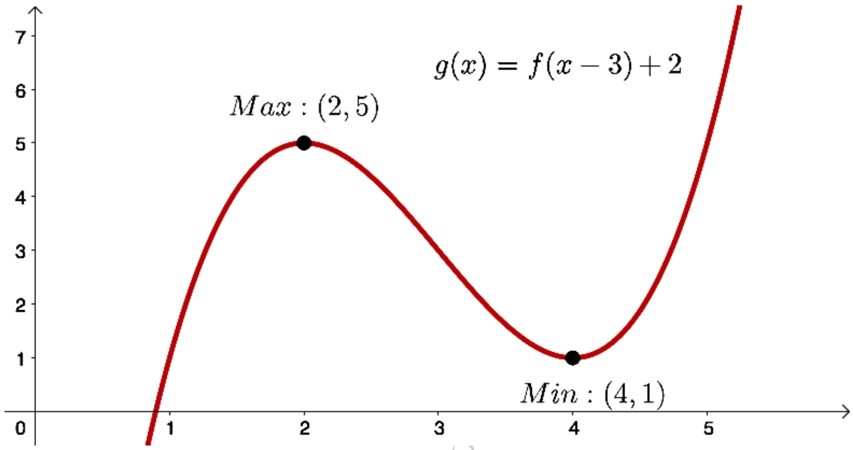
  - Si $x < 0 \implies f''(x) < 0$ y la función es *convexa* $(\cap)$
  - Si $x > 0 \implies f''(x) > 0$ y la función es *cóncava* $(\cup)$



b) Teniendo en cuenta que la gráfica de la función $f(x+a)+b$ es la misma que la de $f(x)$:

- Desplazada horizontalmente a unidades a la izquierda si a es positivo y a unidades a la derecha si a es negativo
- Desplazada verticalmente b unidades hacia arriba si b es positivo y b unidades hacia abajo si b es negativo

Por tanto la gráfica de $g(x) = f(x-3)+2$ será la misma que la de $f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 ó 3 y C el resultado es par.

a) (1 punto) Verifique que $P(A \mid C) = P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C)$.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cup B \mid C)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

Veamos cada uno de los sucesos:

$$A = \{1,2\} \qquad B = \{2,3\} \qquad C = \{2,4,6\}$$
$$A \cap B = \{2\} \qquad A \cup B = \{1,2,3\}$$

a) $P(A \mid C) = \dfrac{1}{3}$ & $P(B \mid C) = \dfrac{1}{3}$ & $P(A \cap B \mid C) = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A \cup B \mid C) = \dfrac{1}{3}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1.5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11.0703 y 12.9297.

a) (1 punto) Determine el valor de la media muestral.

b) (1 punto) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.5) \qquad \& \qquad I.C. = (11.0703; 12.9297)$

$$\overline{x} = \frac{11.0703 + 12.9297}{2} = 12$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.5) \xrightarrow{n=10} 1 - \alpha = ?$

$$E = \frac{12.9297 - 11.0703}{2} = 0.9297$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{10}} = 0.9297 \implies z_{\alpha/2} = 1.96 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975$$

$$1 - \alpha/2 = 0.975 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies \alpha = 0.05 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

Modelo 2023
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 1 - a^2 = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\textit{Rouche}} \text{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[F_2 - 2F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y + 2 = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *a) (1 punto) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.*
>
> *b) (1 punto) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tantentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)*

Solución.

a) $9x - x^2 = x \cdot (9 - x) = 0 \implies x = \{0, 9\}$, que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 9)$

$$A_1 = \int_0^9 f(x)\,dx = \int_0^9 (9x - x^2)\,dx = \left.\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^9 = \left(\frac{729}{2} - \frac{729}{3}\right) - 0 = \frac{243}{2}$$

$$Area = |A_1| = \frac{243}{2} = 121.5\ u^2$$

b) Hallamos las rectas tangentes en los puntos de corte con $OX \implies (0,0)$ y $(9,0)$

$$f'(x) = 9 - 2x$$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 9$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 0 = 9 \cdot (x - 0) \implies r \equiv y = 9x$

$m_s = f'(x_0) = f'(9) = -9$

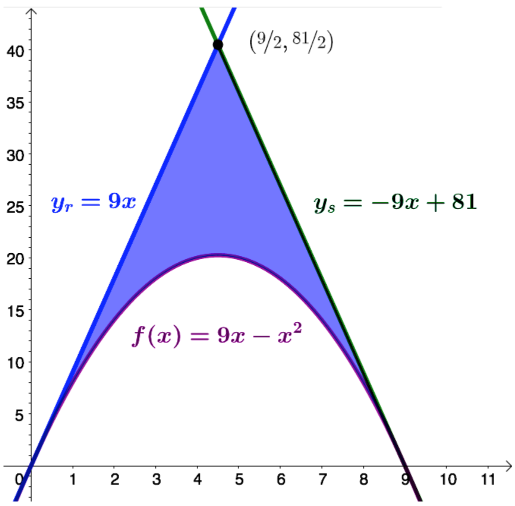
$s \equiv y - y_0 = m_s \cdot (x - x_0)$

$y - 0 = -9 \cdot (x - 9) \implies s \equiv y = -9x + 81$

Ambas rectas se cortan en $9x = -9x + 81 \implies x = \dfrac{9}{2} \implies y = 9 \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{81}{2}$, que definen un triángulo de área $\dfrac{9 \cdot {}^{81}/_{2}}{2} = \dfrac{729}{4}$.

Teniendo en cuenta que el área de la parábola la hemos calculado en el apartado anterior y vale $\dfrac{243}{2}$, el área pedida será:

$$Area = \frac{729}{4} - \frac{243}{2} = \frac{243}{4} = 60.75\ u^2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \qquad 1 \leq t \leq 2$$

siendo t el tiempo de reposo, medido en horas.

a) *(1 punto) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valore del coste mínimo.*

b) *(1 punto) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $C(t) = 150 + 100 \cdot Q(t) = 150 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5\right) = 50t^4 - 300t^2 + 650$

$$C'(t) = 200t^3 - 600t = 200t \cdot (t^2 - 3) = 0 \implies \begin{cases} \cancel{t = 0}, \ t \notin [1,2] \\ \cancel{t = -\sqrt{3}} \notin [1,2] \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$C''(t) = 600t^2 - 600 \implies C''(\sqrt{3}) = 1200 > 0 \overset{(\cup)}{\implies} \text{Mín. en } t = \sqrt{3}$$

Por lo tanto el coste mínimo es de $C(\sqrt{3}) = 200$ € con un tiempo de reposo de $t = \sqrt{3} \simeq 1.73$ horas.

b) Estudiemos la monotonía de la función coste $C(t)$

	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, 2\right)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Evaluamos la función coste en los extremos del dominio: $C(1) = 400$ & $C(2) = 250$, por lo que el coste máximo es de 400 € en $t = 1$ horas de reposo, con una cantidad de ingrediente secreto de $Q(1) = 2.5$ gramos.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

b) (1 punto) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$D_i \equiv \text{“Sale el número } i \text{ en el dado”}$$
$$G \equiv \text{“El jugador se lleva el premio”}$$

La probabilidad de que salga un i en el dado es $P(D_i) = \dfrac{1}{6}$, mientras que la probabilidad de que gane el premio habiendo salido un i en el dado es $P(G \mid D_i) = \dfrac{1}{7-i}$, ya que solo hay un premio entre los $7-i$ sobres que restan, tras retirar i sobres vacíos.

$$\begin{aligned}
P(G) &= P\big((D_1 \cap G) \cup (D_2 \cap G) \cup (D_3 \cap G) \cup (D_4 \cap G) \cup (D_5 \cap G) \cup (D_6 \cap G)\big) \\
&= P(D_1 \cap G) + P(D_2 \cap G) + P(D_3 \cap G) + P(D_4 \cap G) + P(D_5 \cap G) + P(D_6 \cap G) \\
&= P(D_1) \cdot P(G \mid D_1) + P(D_2) \cdot P(G \mid D_2) + P(D_3) \cdot P(G \mid D_3) \\
&+ P(D_4) \cdot P(G \mid D_4) + P(D_5) \cdot P(G \mid D_5) + P(D_6) \cdot P(G \mid D_6) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} = \frac{49}{120} \simeq 0.40833
\end{aligned}$$

b) $P(D_1 \mid G) = \dfrac{P(D_1 \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(D_1) \cdot P(G \mid D_1)}{P(G)} = \dfrac{1/6 \cdot 1/6}{49/120} = \dfrac{10}{147} = 0.06803$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0.55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98.02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) (1 punto) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2023 - Opción B)

Solución.

a) $n = ?$ & $\hat{p} = 0.55$ & $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.45$ & $E < 0.1$ & $1 - \alpha = 0.9802$

$1 - \alpha = 0.9802 \implies \alpha = 0.0198 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.0099 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.9901 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.33$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} < 0.1 \implies n \geq \left(\frac{2.33}{0.1}\right)^2 \cdot 0.55 \cdot 0.45 = 134.36$$

$$\implies \boxed{n = 135}$$

b) $n = 100$ & $\hat{p} = \frac{70}{100} = 0.7$ & $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.3$ & $1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{100}} = 0.0898$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.6102; 0.7898)}$$