MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2022

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2022
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall\, a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$$\text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3 \quad \& \quad 2x + y \leq 8 \quad \& \quad x + 2y \leq 10 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 3 & \to (0, 3) \quad \& \quad (3, 0) \\ ② \ 2x + y \leq 8 & \to (0, 8) \quad \& \quad (4, 0) \\ ③ \ x + 2y \leq 10 & \to (0, 5) \quad \& \quad (10, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

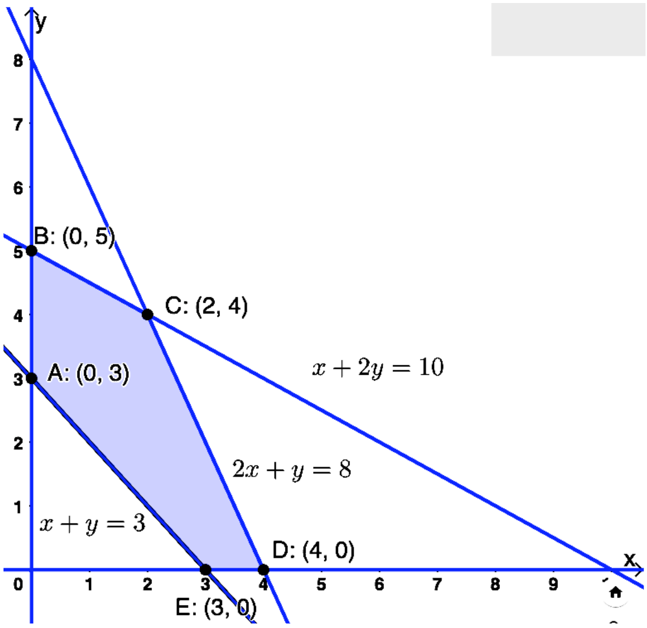
- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + 3y$

- `Región factible` Representamos S y hallamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	9
B	0	5	15
C	2	4	16
D	4	0	8
E	3	0	6

Por tanto la *función factible* $f(x, y)$ tiene un valor máximo igual a 16 que se produce en el punto $C(2, 4)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

a) *(1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) *Calcule*

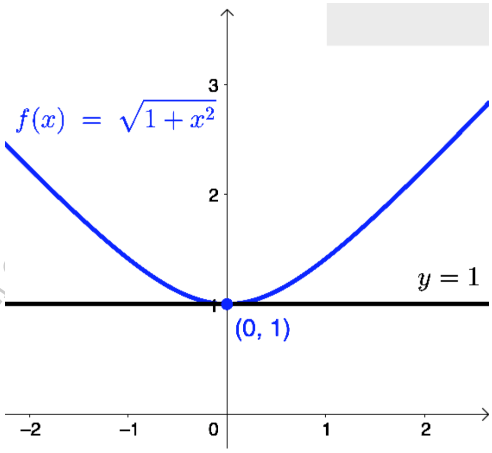
$$\int_0^1 2x \cdot f(x)\, dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) Recta tangente en $x = 0$

$$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$$
$$\implies (x_0, y_0) = (0, 1)$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 0$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0)$$
$$r \equiv y = 1$$



b) $$\int_0^1 2x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\sqrt{u}}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{8} - 1\right) \simeq 1,2189$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

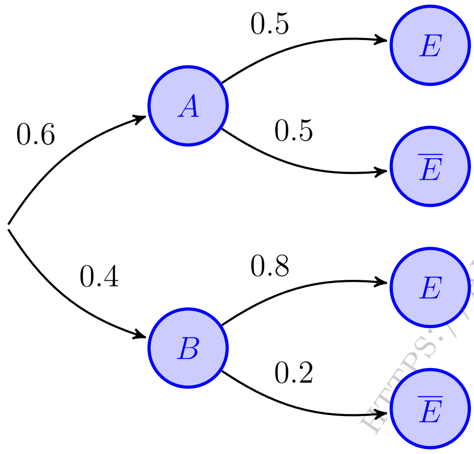
b) (1 punto) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El plato es del primer restaurante”}$$
$$B \equiv \text{“El plato es del segundo restaurante”}$$
$$E \equiv \text{“El plato es productos ecológicos”}$$



a) $$P(E) = P\big((A \cap E) \cup (B \cap E)\big) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = P(A) \cdot P(E \mid A) + P(B) \cdot P(E \mid B) = 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62$$

b) $$P(B \mid \overline{E}) = \frac{P(B \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{E} \mid B)}{1 - P(E)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.62} = 0.2105$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0.25 horas.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2.9 horas si $\mu = 2.75$ horas.

b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(2.9388, 3.0613)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(2.75, 0.25) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2.75, \dfrac{0.25}{\sqrt{25}} = 0.05\right)$

$$P\left(\overline{X} < 2.9\right) = P\left(Z < \frac{2.9 - 2.75}{0.05}\right) = P(Z < 3) = 0.9987$$

b) $n = 64 \qquad \& \qquad IC = (2.9388, 3.0623)$

$$E = \frac{3.0623 - 2.9388}{2} = 0.06125 \xRightarrow{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.25}{\sqrt{64}} = 0.06125 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \xRightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

Modelo 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x - y + az &= -1 \\ 2x + y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = -2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3a + 3 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = -2$ por el método de Gauss, sabiendo que como

$a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - 1 = 2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left[F_2 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ \boxed{a = 1} \end{array} \right.$$

- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible
- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \square & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = -2$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 1 + 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x - 3}$$

a) *(1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.*

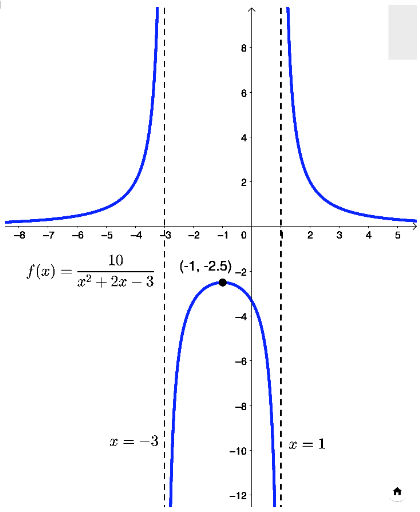
b) *(1 punto) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x = \{-3, 1\} \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre los puntos que no pertenecen al dominio.



$$\lim_{x\to -3} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{10}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{-20\cdot(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} = 0 \implies -20\cdot(x+1) = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$+$	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ y *decreciente* en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1, -5/2)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

- Si $x < 2$, $f(x) = ax^2 - 2x$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 2$, $f(x) = \ln(x-1)$, que es continua en $x - 1 > 0 \implies x > 1$, luego continua en $x > 2$.
- Si $x = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = 0$
  - $f(2) = a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 4a - 4$

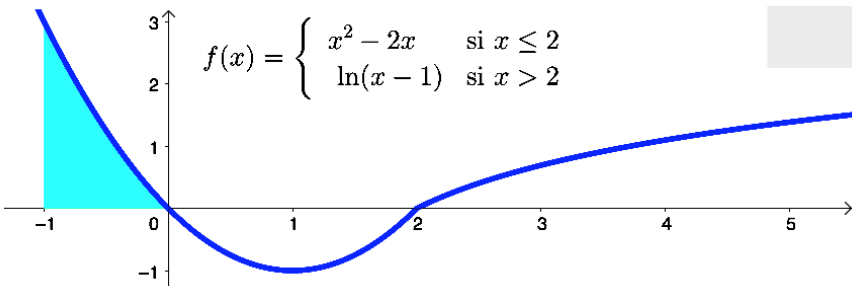
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2 \implies \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$$4a - 4 = 0 \implies \boxed{a = 1}$$

Entre las rectas verticales $x = -1$ y $x = 0$ la función, para $a = 1$, $f(x) = x^2 - 2x$, que corta al eje OX en $x = 0$ y $x = 2$, lo que define un único recinto $A_1 = (-1, 0)$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

$$Area = |A_1| = \frac{4}{3} \simeq 1.333\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) (1 punto) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ "Los depostistas tienen **beca** de alto rendimiento"
$E \equiv$ "Los deportistas cursan **estudios superiores**"

$$P(B) = 0.5 \qquad \& \qquad P(E) = 0.3 \qquad \& \qquad P(B \cap E) = 0.1$$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7$

b) $P(\overline{B} \mid \overline{E}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - 0.7}{1 - 0.3} \simeq 0.4286$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) (1 punto) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 98 % para estimar μ.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 44$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6}{\sqrt{81}} = 1.0967$$

$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (42.9033; 45.0967)}$$

b) $n = ?$ & $2E \le 3 \implies E \le 1.5$ & $1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \le 1.5 \implies n \ge \left(1.96 \cdot \frac{6}{1.5}\right)^2 = 61.47 \implies \boxed{n = 62}$$