

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



EVAU MODELO 2021

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Modelo 2021

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a , b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.
- b) (1 punto) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b+ac & 2c & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A - B \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b+ac & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 2a = a - 1 & \Rightarrow a = -1 \\ 2c = c - 1 & \Rightarrow c = -1 \\ 2b + ac = b - 1 & \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) Para } a = b = c = 2 \text{ la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^T \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) (1 punto) Obtenga los coeficientes reales a , b y c , de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) (1 punto) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la infegral $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) ■ Extremo relativo en $x = -3 \implies f'(-3) = 0$
 $f'(x) = 2ax + b \implies f'(-3) = -6a + b = 0 \implies b = 6a$

■ $r \equiv y = 6x + 8$ es la recta tangente en $x_0 = 0$

$$y_0 = 8 = f(x_0) = f(0) = c \implies \boxed{c = 8}$$

$$f'(0) = 6 \implies \boxed{b = 6} \implies b = 6a \implies \boxed{a = 1}$$

Y por tanto:

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &= \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x} dx = \int_1^e 2x dx + \int_1^e dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ &= x^2 + x + \ln x \Big|_1^e = \left(e^2 + e + \ln e \right) - \left(1 + 1 + \ln 1 \right) = e^2 + e - 1 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

- a) (1 punto) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
- b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

- A. Vertical Analizamos los puntos que no pertenecen al dominio.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

■ A. Horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.

- A. Oblicua Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4}{x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1$$

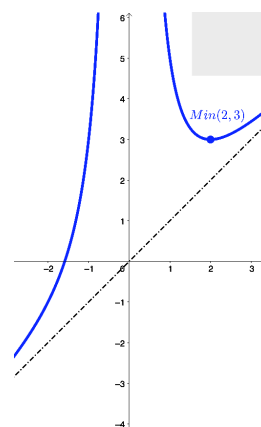
$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} \right] = 0$$

Luego la función $f(x)$ tiene una A. Oblicua en $y = x$.

- b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4}$$
$$= \frac{x^4 - 8x}{x^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 2)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(2, 3)$.



	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Ejercicio 4 (2 puntos)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

- a) (1 punto) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
- b) (1 punto) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

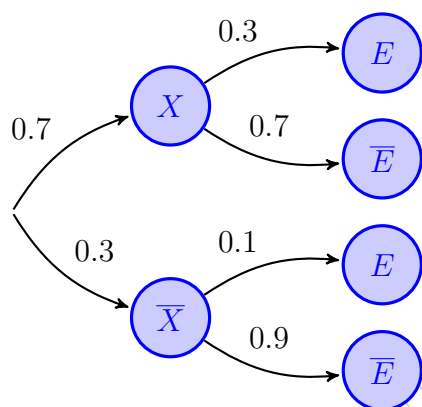
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los siguientes sucesos:

$X \equiv$ “La verdura es de proximidad”

$E \equiv$ “La verdura es ecológica”



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\overline{E}) &= P((X \cap \overline{E}) \cup (\overline{X} \cap \overline{E})) \\ &= P(X \cap \overline{E}) + P(\overline{X} \cap \overline{E}) \\ &= P(X) \cdot P(\overline{E} | X) + P(\overline{X}) \cdot P(\overline{E} | \overline{X}) \\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \cup E) &= P(X) + P(E) - P(X \cap E) \\ &= P(X) + 1 - P(\overline{E}) - P(X) \cdot P(E | X) \\ &= 0.7 + 1 - 0.76 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.73 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 5 (2 puntos)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

- a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) (1 punto) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, \bar{X} , esté entre 28 y 30 kilómetros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.1) \xrightarrow{n=20} \bar{x} = 30$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$$

$$I.C._{95\%}(\mu) = (\bar{x} - E, \bar{x} + E) \implies I.C._{95\%}(\mu) = (25.62; 34.38)$$

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \bar{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = 3.16\right)$

$$\begin{aligned} P(28 \leq \bar{X} \leq 30) &= P\left(\frac{28 - 28}{3.16} \leq Z \leq \frac{30 - 28}{3.16}\right) = P(0 \leq Z \leq 0.63) \\ &= P(Z \leq 0.63) - P(Z \leq 0) = 0.7357 - 0.5 = 0.2357 \end{aligned}$$

_____ o _____

Modelo 2021

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

■ Incógnitas

$x \equiv$ "Hectáreas dedicadas al cultivo de trigo"

$y \equiv$ "Hectáreas dedicadas al cultivo de cebada"

■ Región Factible

Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1} x + y \leq 5 & \rightarrow (0, 5) \quad \& \quad (5, 0) \\ \textcircled{2} x + y \geq 1 & \rightarrow (0, 1) \quad \& \quad (1, 0) \\ \textcircled{3} x \leq y + 1 & \rightarrow (5, 4) \quad \& \quad (1, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

■ Función objetivo

$f(x, y) = 200x + 60y$

■ Región factible

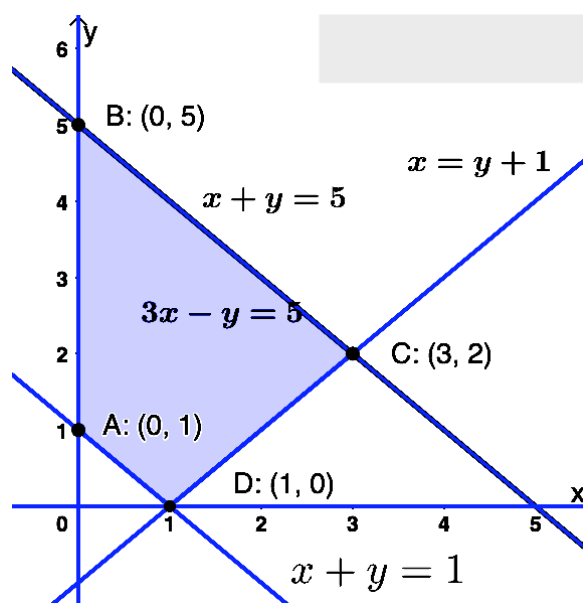
Representamos la región y calculamos los vértices.

■ Optimización de F.O.

Evalúamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	1	60
B	0	5	300
C	3	2	720
D	1	0	200

Por tanto el *beneficio máximo* es de 720 euros y se produce destinando 3 hectáreas al cultivo de trigo y 2 al de cebada.



Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2a - 1 \\ 2x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = \{1, 2\}$$

- Si $a \neq \{1, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$$

- b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - 2 - 1/2 &= -1 & \Rightarrow x &= 3/2 \\ \Rightarrow -(-2) - 2z &= 3 & \Rightarrow y &= -2 \\ \Rightarrow -y &= 2 & \Rightarrow z &= -1/2 \end{aligned}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -4a+3 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-2a \end{array} \right) \\ &\sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & a-2 & -1 & -4a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-2a \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a \neq 1, 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \square \\ -1 & \square & -1 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPAT. DETERMINADO}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMP. INDETERMINADO}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{SIST. INCOMPATIBLE} \\ \text{(Depende dónde despejes)} \\ z = -1 \text{ o } z = 5 \end{array}$$

- b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} x - 2 - 1/2 &= -1 & \Rightarrow x &= 3/2 \\ -2z - (-2) &= 3 & \Rightarrow y &= -2 \\ -y &= 2 & \Rightarrow z &= -1/2 \end{aligned}$$

— o —

Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \frac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.
- b) (1 punto) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

- a) $x^2 - 9 = 0 \implies x = \{-3, 3\}$, pero $-3 < 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$
Para que $f(x)$ sea derivable ha de ser continua.

■ Si $x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \frac{1}{9} \right) = -\frac{1}{9}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2-9} = -\frac{1}{9}$
- $f(0) = -\frac{1}{9}$

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Veamos la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & , \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 9 - 2x \cdot (x+1)}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + a) = a$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} = -\frac{9}{81} = -\frac{1}{9}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, y por tanto en todo su dominio, se sigue que $a = -\frac{1}{9}$.

- b) Para $a = 0$ la función será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

■ A. Vertical Analizamos los puntos que no pertenecen a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$

- A. Horizontal

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 - \frac{1}{9} \right) = +\infty \Rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \Rightarrow \text{A.H. en } y = 0$$

- A. Oblicua No tiene asíntotas oblicuas.

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0.4$, $P(D) = 0.6$ y $P(C \cup D) = 0.8$ Calcule:

a) (1 punto) $P(C | D)$.

b) (1 punto) $P(\overline{C \cap D} | C)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(C) = 0.4 \quad \& \quad P(D) = 0.6 \quad \& \quad P(C \cup D) = 0.8$$

a) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$

$$\Rightarrow P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0.4 + 0.6 - 0.8 = 0.2$$

$$P(C | D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2}{0.6} = 0.33$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\overline{C \cap D} | C) &= \frac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \frac{P((\overline{C \cap D}) \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(\overline{D} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 5 (2 puntos)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

- a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.
- b) (1 punto) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300)$ & $n = ?$ & $E < 100$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} < 100 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{300}{100}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \bar{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{50}} = 42.43\right)$

$$P(\bar{X} \geq 2700) = P\left(Z \geq \frac{2700 - 3000}{42.43}\right) = P(Z \geq -7.07) = P(Z \leq 7.07) \simeq 1$$

_____ o _____