MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2020

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2020
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) (1 punto) Para $a = 0$ y $b = 2$ determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b=2 & \Rightarrow (-2)^2-2=2 \checkmark \\ a+2=0 & \Rightarrow \boxed{a=-2} \\ ab+2b=0 & \Rightarrow -2\cdot(-2)+2\cdot(-2)=0 \checkmark \\ b+4=2 & \Rightarrow \boxed{b=-2} \end{cases}$$

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$XA = B - X \implies XA + X = B$$
$$X\cdot(A+I) = B \implies X\cdot\underbrace{(A+I)\cdot(A+I)^{-1}}_{I} = B\cdot(A+I)^{-1}$$
$$\boxed{X = B\cdot(A+I)^{-1}}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A+I| = 1 \quad \& \quad (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = B\cdot(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{si } x < -8 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } -8 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde ln *denota el logaritmo neperiano y* $a \in \mathbb{R}$*. Se pide:*

a) *(1 punto) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x = -8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.*

b) *(1 punto) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x = e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

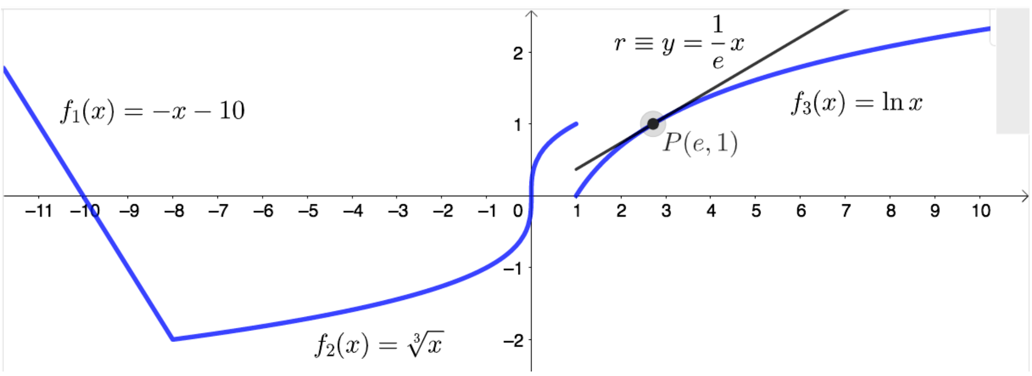
a)
- Si $x < -8 \Rightarrow f(x) = -x + a$, que es continua en $\mathbb{R}$
- Si $-8 < x < 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}$, que es continua en $\mathbb{R}$
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = \ln x$, que es continua en $x > 0$, luego continua
- Si $x = -8$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -8} (-x + a) = a + 8 \\ \lim\limits_{x \to -8^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -8} \sqrt[3]{x} = -2 \\ f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f(x) \text{ será cont. en } x = -8 \text{ si:} \\ a + 8 = -2 \Longrightarrow \boxed{a = -10} \end{array}$$

- Si $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0 \\ f(1) = \ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} f(x) \text{ tiene una discontinuidad} \\ \text{de salto finito en } x = 1 \end{array}$$

b) Hallamos la recta tangente en $x = e$, en donde $f(x) = \ln x$.



$x_0 = e \implies y_0 = f(e) = \ln e = 1 \implies (x_0, y_0) = (e, 1)$

$f'(x) = \frac{1}{x} \implies m_r = f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{e}$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \implies \boxed{y = \frac{1}{e}x}$

Como la pendiente de la recta $m_r = \dfrac{1}{e} > 0$, la recta es creciente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la curva

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

a) (1 punto) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y - 6x + 1 = 0$, indicando su abscisa y ordenada.

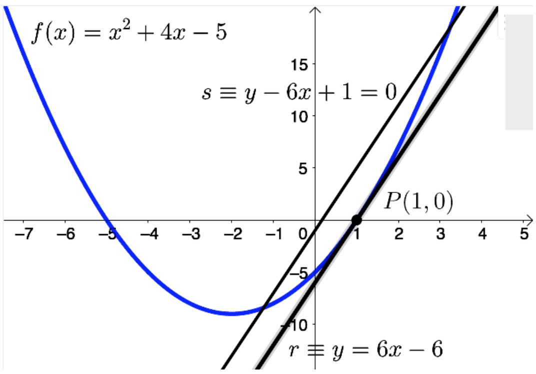
b) (1 punto) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y la curva $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

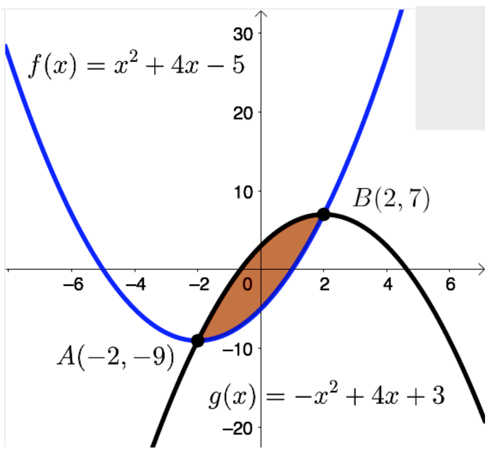
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) La recta r buscada es paralela a $s \equiv y - 6x + 1 = 0$

$$r \parallel s \implies m_r = m_s = 6$$
$$f'(x) = 2x + 4$$
$$m_r = f'(x_0) \implies 6 = 2x_0 + 4$$
$$x_0 = 1 \implies y_0 = f(1) = 0 \implies \boxed{P(1,0)}$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y = 6 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = 6x - 6$$





b) Creamos una nueva función $h(x) = f(x) - g(x)$ y hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$h(x) = x^2 + 4x - 5 - (-x^2 + 4x + 3)$$
$$= 2x^2 - 8 = 0 \implies x = \pm 2$$

Luego tenemos un único recinto de integración $A_1 = (-2, 2)$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} h(x)\, dx = \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\, dx = \left. \frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} - 8 \cdot 2 \right)$$
$$- \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - 8 \cdot (-2) \right) = -\frac{64}{3}$$
$$Area = |A_1| = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que solo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) (1 punto) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

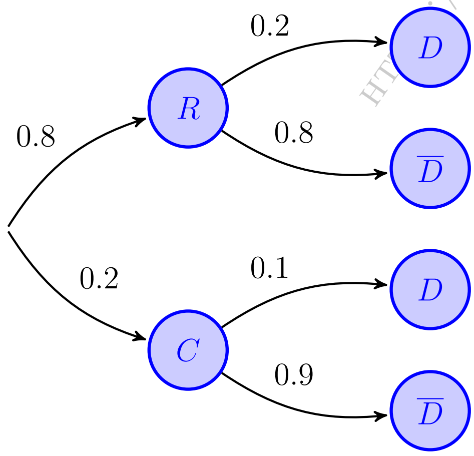
b) (1 punto) Sea devuelta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$R \equiv$ "La venta es de ropa"
$C \equiv$ "La venta es de complementos de moda"
$D \equiv$ "La compra es devuelta"



a) $P(R \cap D) = P(R) \cdot P(D \mid R)$
$= 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

b) $P(D) = P\big((R \cap D) \cup (C \cap D)\big)$
$= P(R \cap D) + P(C \cap D)$
$= P(R) \cdot P(D \mid R) + P(C) \cdot P(D \mid C)$
$= 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.18$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0.09 mg^2.

a) *(1 punto) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.*

b) *(1 punto) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0.05 mg con un nivel de confianza del 98 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) Nos dicen que la varianza $\sigma^2 = 0.09 \implies \sigma = 0.3$

$X \equiv$ "Cantidad de principio activo" $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 0.3) \xrightarrow{n=400} \overline{x} = 13$

$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \dfrac{0.3}{\sqrt{400}} = 0.039$

$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (12.961; 13.039)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 98\,\% \qquad \& \qquad E < 0.05$

$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.1 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{0.3}{\sqrt{n}} < 0.05 \implies n > \left(\dfrac{2.325 \cdot 0.3}{0.05}\right)^2 = 194.6 \implies \boxed{n = 195}$

Modelo 2020
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^\top$

b) (1 punto) Para $m = 0$ calcule B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Vamos a obligar a que $A \cdot B = C^\top$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A\cdot B} = \begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{C^\top}$$

Igualando ahora elemento a elemento tenemos:

$$\begin{cases} 2m-1 = 3 & \Longrightarrow \boxed{m = 2} \\ m+2 = 4 & \Longrightarrow m = 2 \checkmark \\ m-1 = 1 & \Longrightarrow m = 2 \checkmark \end{cases}$$

b) Para $m = 0$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = 1$

$$\text{Adj}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a - 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

a) *(1 punto) Discuta el sistema para los distintos valores de* $a \in \mathbb{R}$.

b) *(1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para* $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -1 - 3a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

- Si $a \neq -\dfrac{1}{3}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1/3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1/3 & 6 \\ 2 & -1 & -4/3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{56}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Como $a \neq -1/3$, estamos ante un S. C. D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 5F_2 + 3F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2 \cdot 2 + 1 = 6 \\ \Rightarrow -5y - 1 = -11 \\ \Rightarrow 7z = 7 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Se considera la función real de variable real definida por:*
>
> $$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$
>
> *a) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
>
> *b) (1 punto) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas* $x = -1$ *y* $x = 1$.
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)*

Solución.

a) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x^2} + \sqrt{2}x \cdot (-2x)e^{-x^2} = \sqrt{2}e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

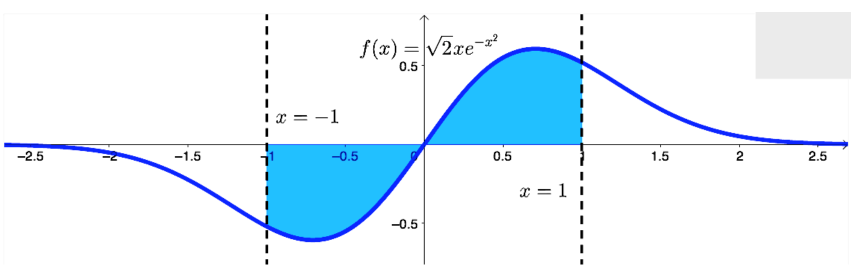
La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y un *máximo relativo* en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{2}xe^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} -\sqrt{2}xe^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$\overset{\text{L'Hòpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{-\sqrt{2}}{+\infty}\right] = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2} = 0 \implies \begin{cases} \sqrt{2}x \implies x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

Lo que, junto con las rectas verticales, define dos recintos de integración: $A_1(-1, 0)$ y $A_2(0, 1)$.



$$A_1 = \int_{-1}^{0} \sqrt{2} x e^{-x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-x^2}\Big]_{-1}^{0} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2e}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right)$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} \sqrt{2} x e^{-x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-x^2}\Big]_{0}^{1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2e}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 0.894\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.

a) (1 punto) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.

b) (1 punto) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) El número de cruces obtenidas al lanzar una moneda al aire n veces es una variable binomial $X : \mathcal{B}(n, 1/2)$, pues la probabilidad de obtener una cruz es $p = 1/2$, y por tanto $q = 1 - p = 1/2$.
La probabilidad de sacar r cruces en los n lanzamientos será:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{r+n-r} = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Y, más en concreto, la probabilidad de obtener cero cruces en n lanzamientos será $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Llamamos ahora $D_i \equiv$ "Sacar i en el lanzamiento del dado", con una probabilidad $P(D_i) = \frac{1}{6}$.

De esta forma la probabilidad de lanzar el dado y obtener cero cruces será:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(D_1 \cap X = 0) + P(D_2 \cap X = 0) + \cdots + P(D_6 \cap X = 0) \\
&= P(D_1) \cdot P(X = 0 \mid D_1) + \cdots + P(D_6) \cdot P(X = 0 \mid D_6) \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{6} \cdot S_6 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Prog. geométrica} \\ a_1 = 1/2 \quad \& \quad r = 1/2 \\ S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r - 1} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{6} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = 0.164
\end{aligned}$$

b) $P(X = 0 \mid D_2) = \dfrac{P(X = 0 \cap D_2)}{P(D_2)} = \dfrac{P(D_2) \cdot P(X = 0 \mid D_2)}{P(D_2)} = \dfrac{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{0.164} = 0.2541$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$ g.

a) (1 punto) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{x} = 2700$ g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) (1 punto) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$ g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen en media entre 3000 g y 3450 g.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X \equiv$ "Peso sandías (g)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 450) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 2700$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{450}{\sqrt{25}} = 176.4$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (2523.6, 2876.4)}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 450) \xrightarrow{n=4} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \dfrac{450}{\sqrt{4}}\right) = \mathcal{N}(3000, 225)$

$$P(3000 < X < 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{225} < Z < \frac{3450 - 3000}{225}\right) = P(0 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$