MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2015

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0.5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar mas de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Cantidad de bebida A (millones de litros)"
  $y \equiv$ "Cantidad de bebida B (millones de litros)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

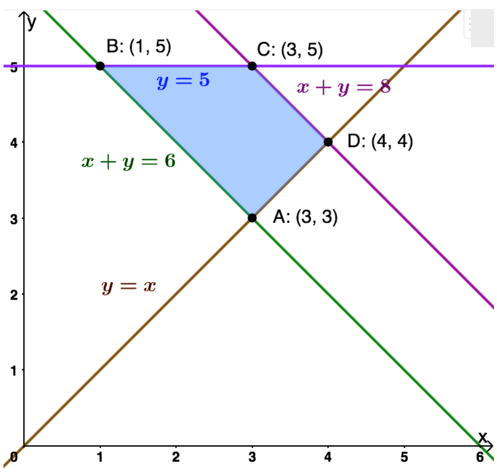
$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \ x + y \leq 8 & \to (0,8) \quad \& \quad (8,0) \\ ③ \ y \leq 5 & \to (0,5) \\ ④ \ y \geq x & \to (0,0) \quad \& \quad (5,5) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x + 0.5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3	3	7.5
B	1	5	4.5
C	3	5	8.5
D	4	4	10



El *coste mínimo* es de 4.5 millones de euros y se produce vendiendo 1 millón de litros de la bebida A y 5 de la bebida B.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese A^{-1}.

b) (1 punto) Calcúlese $A^{\top} \cdot A$.

Nota*:* $A^{\top}$ *denota la traspuesta de la matiz* A*.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $A^{\top} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Dibújese de una manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas*

$$y = \sqrt{6x} \qquad \& \qquad y = \frac{x^2}{6}$$

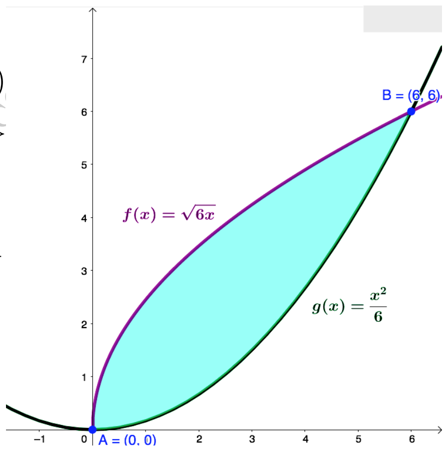
b) *(1 punto) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

Llamamos $f(x) = \sqrt{6x}$ & $g(x) = \frac{x^2}{6}$

a)
- $f(x)$ raíz cuadrada que pasa por $A:(0,0)$
- $g(x)$ parábola convexa con vértice en $V:(0,0)$
- $f(x) = g(x) \implies$ corte en $x = \{0,6\} \implies A:(0,0)$ & $B:(6,6)$



b) $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{6x} - \frac{x^2}{6} = 0 \implies 6x = \frac{x^4}{36}$

$\implies x^4 - 216x = 0 \implies x \cdot (x^3 - 216) = 0$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 216 = 0 \implies x = 6 \end{cases}$$

Lo que define un único recinto de integración $A_1 = (0,6)$

$$A_1 = \int_0^6 h(x)\,dx = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \int_0^6 \left[(6x)^{1/2} - \frac{x^2}{6}\right] dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot (6x)^{3/2} - \frac{x^3}{18}\Big]_0^6$$

$$= \frac{\sqrt{(6x)^3}}{9} - \frac{x^3}{18}\Big]_0^6 = (24 - 12) - (0) = 12$$

$Area = |A_1| = 12\ u^2$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$. Calcúlese:

a) *(1 punto)* $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) *(1 punto)* $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

Vamos a reunir los datos que nos dan en el enunciado:

$$P(A) = 0.4 \qquad \& \qquad P(B) = 0.3 \qquad \& \qquad A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

a) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - \cancelto{0}{P(A \cap B)}\right] = 1 - (0.4 + 0.3) = 0.3$$

b) $$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - \cancelto{0}{P(A \cap B)} = 0.3$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1.2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) (1 punto) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW, si $\mu = 6.3$ kW.

b) (1 punto) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6.1; 6.9)$ para la media del consumo familiar diario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción A)

Solución.

$$X : \text{“Consumo familiar diario de electricidad (kW)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1.2)$$

a) $X : \mathcal{N}(6.3, 1.2) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6.3, \dfrac{1.2}{\sqrt{50}} = 0.17\right)$

$$\begin{aligned} P\left(6 \leq \overline{X} \leq 6.6\right) &= P\left(\frac{6-6.3}{0.17} \leq Z \leq \frac{6.6-6.3}{0.17}\right) = P(-1.77 \leq Z \leq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - P(Z \leq -1.77) = P(Z \leq 1.77) - P(Z \geq 1.77) \\ &= P(Z \leq 1.77) - \left[1 - P(Z \leq 1.77)\right] = 2P(Z \leq 1.77) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9616 - 1 = 0.9232 \end{aligned}$$

b) $I.C. = (6.1; 6.9) \implies E = \dfrac{6.9 - 6.1}{2} = 0.4$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0.4 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.2}{\sqrt{50}} \implies z_{\alpha/2} = 2.36 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.9909$$

$$\implies \alpha/2 = 0.0091 \implies \alpha = 0.0182 \implies 1 - \alpha = 0.9818 = 98.18\,\%$$

Modelo 2015
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \implies a = \{1/2, 1\}$$

- Si $a \neq \{1/2, 1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Comp. Indeter. (Infinitas soluciones)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{1/2, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 1 \\ \Rightarrow -3y - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \\ \Rightarrow 4z = -3 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = -3/4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

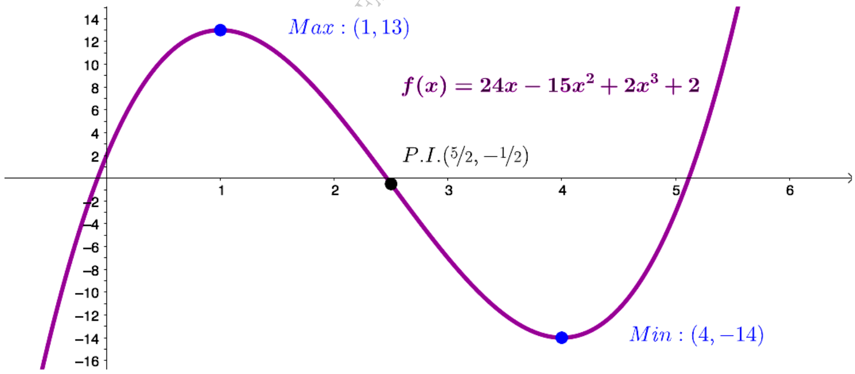
Solución.

a) $f'(x) = 24 - 30x + 6x^2 = 0 \implies x = \{1, 4\}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ y *decreciente* en $(1, 4)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(4, -14)$ y un *máximo relativo* en $(1, 13)$
$f''(x) = -30 + 12x = 0 \implies x = {}^5/_2$ & $f'''(x) = 12 \neq 0 \implies f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en $({}^5/_2, -{}^1/_2)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) *(1 punto) Determínense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1.5$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

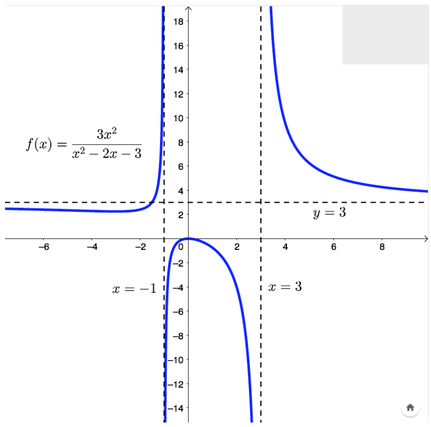
Solución.

a) ▪ `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \{-1, 3\}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{27}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{27}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



▪ `A. Horizontal` $y = 3$

$$y = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 3$$

b)

$$x_0 = -1.5 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1.5) = 3$$
$$\implies (x_0, y_0) = (-1.5, 3)$$

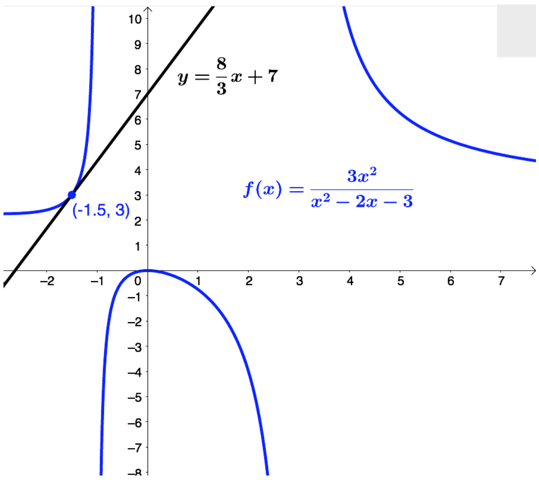
$$f'(x) = \frac{6x \cdot (x+3)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-1.5) = \frac{8}{3}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{8}{3} \cdot (x + 1.5)$$

$$r \equiv y = \frac{8}{3}x + 7$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) (1 punto) Del mismo color.

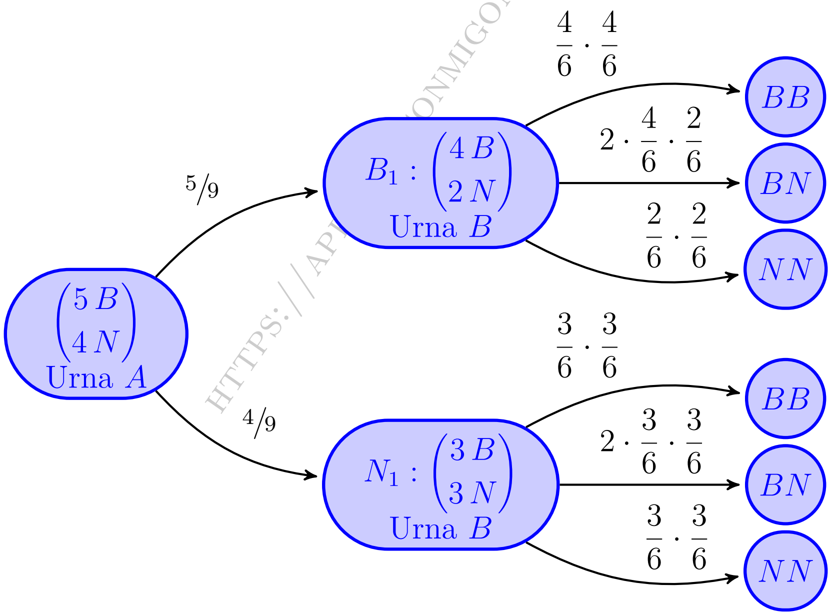
b) (1 punto) De distinto color.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
B_1 &\equiv \text{“Pasar una bola blanca de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
N_1 &\equiv \text{“Pasar una bola negra de la Urna } A \text{ a la } B\text{”}\\
BB &\equiv \text{“Extraer dos bolas blancas de la urna } B\text{”}\\
BN &\equiv \text{“Extraer una bola blanca y otra negra de la urna } B\text{”}\\
NN &\equiv \text{“Extraer dos bolas negras de la urna } B\text{”}
\end{aligned}
$$



a) $P(\text{mismo color}) = P(BB \cup NN) = P(BB) + P(NN) = P\Big((B_1 \cap BB) \cup (N_1 \cap BB)\Big)$

$$
\begin{aligned}
&+ P\Big((B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN)\Big) = P(B_1 \cap BB) + P(N_1 \cap BB)\\
&+ P(B_1 \cap NN) + P(N_1 \cap NN) = P(B_1) \cdot P(BB \mid B_1)\\
&+ P(N_1) \cdot P(BB \mid N_1) + P(B_1) \cdot P(NN \mid B_1) + P(N_1) \cdot P(NN \mid N_1)\\
&= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{43}{81}
\end{aligned}
$$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34.5 días.

a) (1 punto) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2015 - Opción B)

Solución.

a) X : "Nº de días de tratamiento contra el insomnio"

$$X : \mathcal{N}(\mu, 34.5) \xrightarrow{n=10} \overline{x} = \frac{290+275+290+325+285+365+375+310+290+300}{10} = 310.5$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{34.5}{\sqrt{10}} = 21.38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (289.12; 331.88)}$$

b) $n = ?$ & $E < 10$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{34.5}{\sqrt{n}} < 10 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{34.5}{10}\right)^2 = 45.72 \implies \boxed{n = 46}$$