MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2019

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 3m - 12 \neq 0 \implies m \neq 4$$

b) Para $m = 5$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$A \cdot X = A \cdot B + B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B)$

$X = \underbrace{A^{-1} A}_{I} \cdot B + A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = B + A^{-1} \cdot B}$ Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

De esta forma tenemos que

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 8 & 13 & -12 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \leq 4; \quad 2x + y \geq 4; \quad 2x - y \leq 4.$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

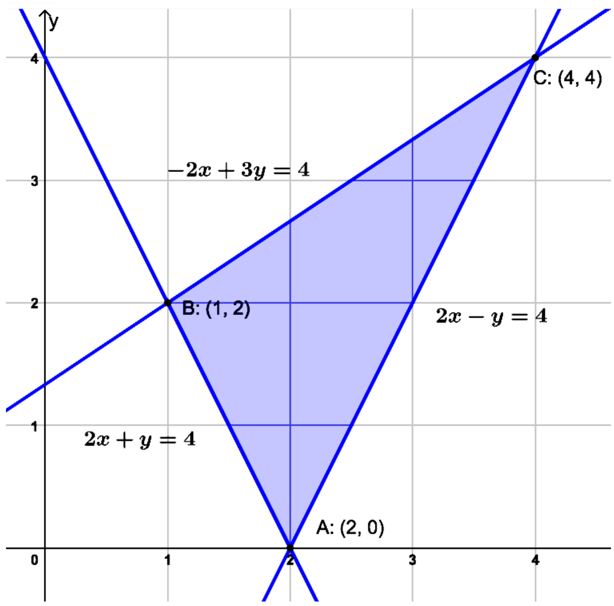
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; -2x + 3y \leq 4 & \to (0, 4/3) \quad \& \quad (-2, 0) \\ ② \; 2x + y \geq 4 & \to (0, 4) \quad \& \quad (2, 0) \\ ③ \; 2x - y \leq 4 & \to (0, -4) \quad \& \quad (2, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	2	0	1
B	1	2	$7/6$
C	4	4	$10/3$

Luego la función objetivo tiene un *mínimo* en $A(2, 0)$, que vale 1 y un *máximo* en $C(4, 4)$ que vale $10/3$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

a) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

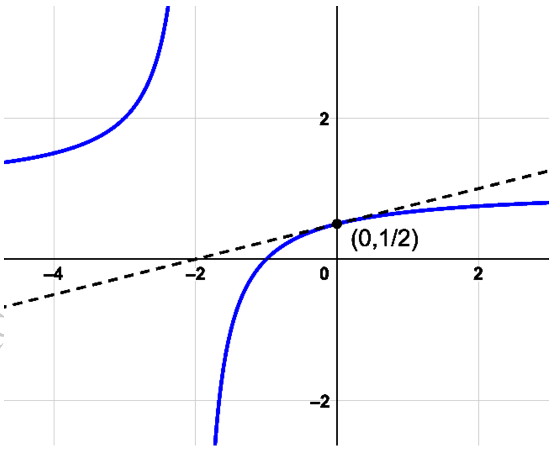
b) *(1 punto) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) El punto de tangencia es

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 1/2$



$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + x - 2) - (x^2 - 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 1/4$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (x - 0)$$

$$\boxed{r \equiv x - 4y + 2 = 0}$$

b)
- `A.Horizontal` $y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$
- `A. Vertical` Hallamos las raíces del denominador: $x^2 + x - 2 = 0 \implies x = \{-2, 1\}$
  - $\lim_{x\to-2} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$
  - $\lim_{x\to 1} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot \cancel{(x-1)}}{(x+2)\cdot\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$

  Por tanto solo habrá A. Vertical en $x = -2$. En $x = 1$ lo que tendremos será un "agujero", pues el punto no pertenece al dominio de definición de la función $f(x)$.

f

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una determinada sede de la EVAU hay un 45 % de alumnos de la modalidad de Ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACCSSII). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen MACCSSII. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de MACCSSII. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Se examine de MACCSSII.

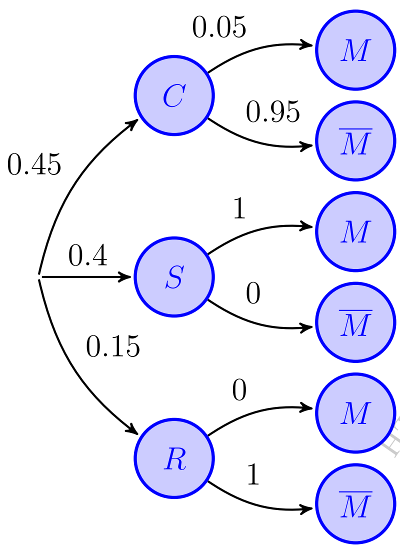
b) (1 punto) Sabiendo que se examina de MACCSS sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

$C \equiv$ "El alumno es de Ciencias" $\qquad S \equiv$ "El alumno es de Ciencias Sociales"

$R \equiv$ "El alumno es de otra modalidad" $\qquad M \equiv$ "El alumno se examina de MACCSSII"



a) $P(M) = P\big((C\cap M)\cup(S\cap M)\cup(R\cap M)\big)$

$= P(C\cap M) + P(S\cap M) + P(R\cap M)$

$= P(C)\cdot P(M \mid C) + P(S)\cdot P(M \mid S)$

$+ P(R)\cdot P(M \mid R) = 0.45\cdot 0.05$

$+ 0.4\cdot 1 + 0.15\cdot 0 = 0.4225$

b) $$P(C \mid M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)\cdot P(M\mid C)}{P(M)}$$

$$= \frac{0.45\cdot 0.05}{0.4225} = 0.0533$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) (1 punto) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, Determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % ($\pm$2 %).

b) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C.(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.02$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tablaa} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E \leq 0.02 \implies z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq 0.02 \implies 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1.96 \cdot 0.5}{0.02}\right)^2 = 2401 \text{ y por tanto } \boxed{n = 2401 \text{ encuestados}}$$

b) $\hat{p} = \dfrac{85}{500} = 0.17 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.83$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.10 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.17 \cdot 0.83}{500}} = 0.0276$$

$$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p} - E;) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.1424; 0.1976)}$$

Modelo 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x+2y+z &=& 1 \\ x+3y+z &=& 2 \\ 5x-y+az &=& -1 \end{array}\right\}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 16a = 0 \Longrightarrow a = 0$

- Si $a \neq 0$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sist. Comp. Indet. (∞ soluciones)

b) Como para $a = 0$ estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 6F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{rl} \Rightarrow x + 3\cdot\frac{11-5\lambda}{16} + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -16y - 5\lambda = -9 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{21-11\lambda}{16} \\ y = \frac{11-5\lambda}{16} \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x < -1 \\ e^{2x+2} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x = -1$.*

b) *(1 punto) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = -1$

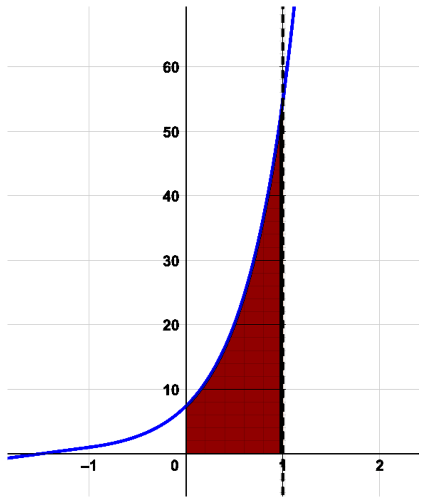
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 2x + a = a - 2 \\ \bullet \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} e^{2x+2} = 1 \\ \bullet\ f(-1) = e^{2\cdot(-1)+2} = e^0 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a - 2 = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

b) Entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$, la función $f(x) = e^{2x-2}$. Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Longrightarrow e^{2x-2} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ puntos de corte con eje X}$$

Por tanto se define un único intervalo de integración $A_1 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right) \\ Area = |A_1| &= \left|\frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\right| \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\,u^2 \simeq 23,6\ u^2 \end{aligned}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{2}$$

	$\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right)$	$\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$	$\left(1+\sqrt{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

Luego la función $f(x)$ es *decreciente* en $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *creciente* en $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo local* en $\left(1-\sqrt{2}, -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ y un *máximo local* en $\left(1+\sqrt{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0.2*. La probabilidad de que, siendo extranjero, sea hombre es* 0.45*. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es* 0.1*. calcúlese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Conocido que es español, sea un hombre.

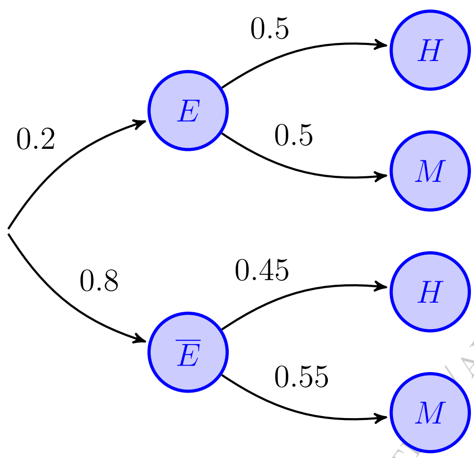
b) (1 punto) Sea una mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“El cliente es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“El cliente es mujer”}$$
$$E \equiv \text{“El cliente es español”}$$



a) $P(M \mid E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.1}{0.2} = 0.5$

$\Longrightarrow P(H \mid E) = 1 - 0.5 = 0.5$

b) $$\begin{aligned} P(M) &= P\big((E \cap M) \cup (\overline{E} \cap M)\big) \\ &= P(E \cap M) + P(\overline{E} \cap M) \\ &= P(E) \cdot P(M \mid E) + P(\overline{E}) \cdot P(M \mid \overline{E}) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.55 = 0.54 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0.1$ kg.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimción de μ sea menor que 0.025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Sabiendo que $\mu = 0.7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0.65 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

Llamamos $X \equiv$ "Contenido en azúcares en los botes de miel (kg)"

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.025$, siendo $1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} \leq 0.025 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.1}{0.025}\right)^2 = 61.46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $$X : \mathcal{N}(0.7, 0.1) \quad \xrightarrow{n=20} \quad \overline{X} : \mathcal{N}\left(0.7; \frac{0.1}{\sqrt{20}} = 0.022\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 0.65) = P\left(Z \leq \frac{0.65 - 0.7}{0.022}\right) = P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 2.24)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2.27) = 1 - 0.9875 = 0.0125$$