MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2016

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Modelo 2016
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Determínese para qué valores de* $a \in \mathbb{R}$ *es invertible* A.

b) *(1 punto) Resuélvase para* $a = 0$ *el sistema:*

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \implies a = \{-12, 2\}$. Por lo que $\exists\, A^{-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{-12, 2\}$

b) Para $a = 0 \neq \{-12, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{nº incognitas} \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Determinado. Y como se trata de un sistema homogéneo su solución es la trivial: $x = y = z = 0$.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Determínese la matriz X que verifica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Llamamos a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que nos queda la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= B - CX \\ AX + CX &= B \\ (A + C)X &= B \\ \underbrace{(A + C)^{-1} \cdot (A + C)}_{I} X &= (A + C)^{-1} \cdot B \\ X &= (A + C)^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$(A + C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A + C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + C)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

a) (1 punto) Estúdiense y determínense sus asíntotas.

b) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

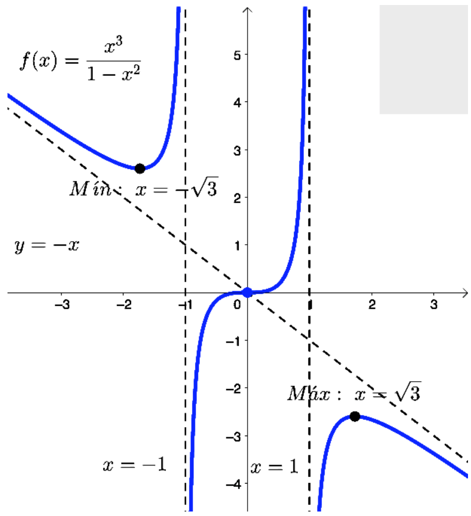
Solución.

a) ▪ `A. Vertical` Buscamos las A. verticales entre las raíces del denominador.

$$1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$



- `A. Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} + x - \cancel{x^3}}{1-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Por lo que la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = -x$.

b) Hallamos los puntos singulares y calculamos el signo de $f'(x)$, con la precaución de tener en cuenta las raíces del denominador.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2\cdot(-x^2+3)}{(1-x^2)^2} = 0$$

$$x^2\cdot(-x^2+3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ -x^2+3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}, -1\right)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(1, \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$ y *decreciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right)$, un *máximo relativo* en $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right)$ y un *punto de inflexión con tangente horizontal* en $(0, 0)$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que procede de la fábrica C.

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) (1 punto) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fabrica A?

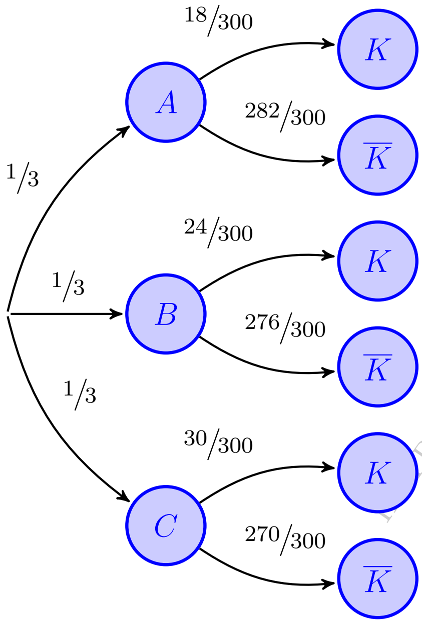
(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La lata es de la fábrica A" $\qquad B \equiv$ "La lata es de la fábrica B"

$C \equiv$ "La lata es de la fábrica C" $\qquad K \equiv$ "La lata está caducada"



a) $$P(K) = P\big((A\cap K)\cup(B\cap K)\cup(C\cap K)\big) = P(A\cap K)+P(B\cap K)+P(C\cap K) = P(A)\cdot P(K\mid A)+P(B)\cdot P(K\mid B) + P(C)\cdot P(K\mid C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{18}{300} + \frac{1}{3}\cdot\frac{24}{300}+\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{300} = 0.24$$

b) $$P(A\mid K) = \frac{P(A\cap K)}{P(K)} = \frac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)} = \frac{1/3\cdot 18/300}{0.24} = 0.25$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) (1 punto) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 98 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

$$x \equiv \text{"Tiempo dedicado a actividades deportivas (min)"}$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=250} \overline{x} = 90$

$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}} = 2.08$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (87.92; 92.08)}$

b) $n = ? \quad \& \quad E < 1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.9$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{20}{1}\right)^2 = 1082.4 \implies \boxed{n = 1083}$$

Modelo 2016
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + ay - 2z = 5 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -3 + a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 3$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} x - 3 - (-1) = 1 \\ -y + (-1) = 2 \\ -z = 1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & 5 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 3 = 0 \\ \boxed{a = 3} \end{array}\right.$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 2$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} x - (-1) + (-3) = 1 \\ -z = 1 \\ -y = 3 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ z = -1 \\ y = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

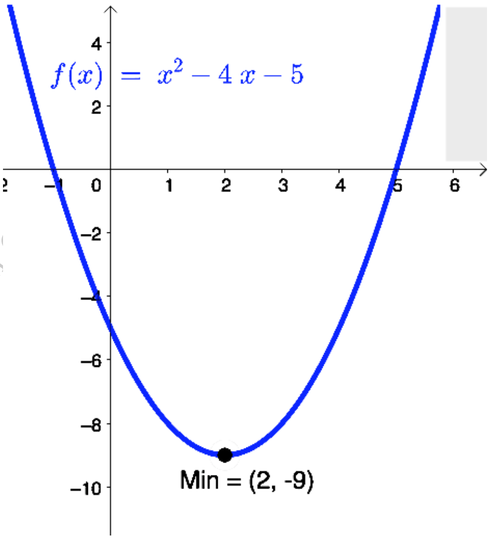
a) (1 punto) Represéntese gráficamente la función f.

b) (1 punto) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) Para representar la función hallaremos los puntos de corte con los ejes coordenados y los extremos relativos.



- Corte con los ejes:
  - Eje x: $y = 0$

    $x^2 - 4x - 5 = 0 \implies \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$
  - Eje y: $x = 0 \implies y = f(0) = -5$
- Extremos relativos:

  $f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$

  $f''(x) = 2 > 0 \xrightarrow{(\cup)} Min(2, -9)$

b) Los puntos de corte con el eje OX son $x = -1$ y $x = 5$ lo que define un único recinto de integración $A_1 = (-1, 5)$

$$A_1 = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{5} (x^2 - 4x - 5)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right]_{-1}^{5} = \left(\frac{125}{3} - 50 - 25\right)$$
$$- \left(-\frac{1}{3} - 2 + 5\right) = -\frac{100}{3} - \frac{8}{3} = -36$$

$Area = |A_1| = |-36| = 36\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

a) *(1 punto) Calcúlese su función derivada.*

b) *(1 punto) Determínense sus intervalos de concavidad* ($\cap$) *y convexidad* ($\cup$).

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = 2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(2x + 2x^3)$

b) $f''(x) = 2xe^{x^2}(2x + 2x^3) + e^{x^2}(2 + 6x^2) = e^{x^2}(4x^4 + 10x^2 + 2) = 0$
$\Longrightarrow \begin{cases} e^{x^2} = 0 \implies \nexists Sol. \\ 4x^4 + 10x^2 + 2 = 0 \implies \nexists Sol. \end{cases}$

Por lo tanto no hay puntos de inflexión y, como $e^{x^2} > 0$ y $2x^4 + 10x^2 + 2 > 0$ entonces $f''(x) > 0$ luego la función $f(x)$ será *convexa* ($\cup$) en todo su dominio.

—————— ○ ——————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0.8; 0.9; 0.7; 0.9; 0.93. *Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:*

a) *(1 punto) Todos los jugadores encesten su tiro libre.*

b) *(1 punto) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos: $E_i \equiv$ "El jugador i encesta"

a) La probabilidad de que todos los jugadores encesten, teniendo en cuenta que son sucesos independientes será:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_5) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_5) = 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.93 = 0.4218$$

b) $$P(\text{"}Alguno\ enceste\text{"}) = 1 - P(\text{"}Ninguno\ enceste\text{"}) = 1 - P\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right)$$
$$= 1 - (0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3) = 0.994$$

—————— ○ ——————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ euros.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(2265.375; 2424.625)$ para μ, con un nivel de confianza del $95\,\%$. Calcúlese la media muestran y el tamaño de la muestra elegida.

b) (1 punto) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del $99\,\%$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95 \quad \& \quad I.C. = (2265.375; 2424.625)$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x} - E = 2265.375 \\ \overline{x} + E = 2424.625 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{2265.375 + 2424.625}{2} = 2345 \\ E = \dfrac{2424.625 - 2265.375}{2} = 79.625 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.025 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{650}{\sqrt{n}} = 79.625 \Longrightarrow n = \left(1.96 \cdot \frac{650}{79.625}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 256}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 650) \quad \& \quad n = 225 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \Longrightarrow \alpha = 0.01 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.005 \Longrightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{650}{\sqrt{225}} = 111.58$$