

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2021 - Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2021

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.
- b) (1 punto) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $A = A^{-1} \implies A \cdot A = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \implies A^2 = I$

$$A^2 = I \implies \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + 1 &= 1 &\Rightarrow a = 0 \\ \Rightarrow 2a &= 0 &\Rightarrow a = 0 \\ \Rightarrow b^2 &= 1 &\Rightarrow b = \pm 1 \end{aligned}$$

b) Para $a = b = 2$ la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 6 \quad \& \quad \text{Adj}A^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

————— o —————

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

- a) (1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
- b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

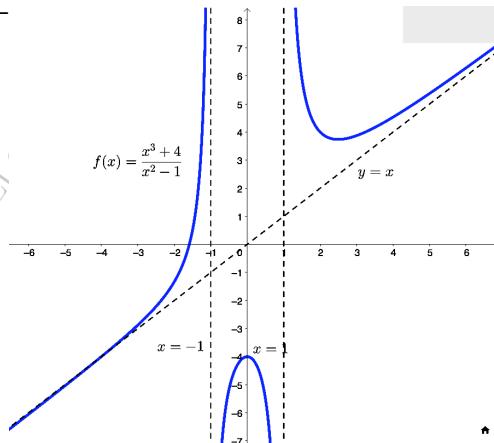
Solución.

a) $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- A. Vertical Buscamos las A. V. entre los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{5}{0} \right] \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{5}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$



- A. Horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \text{no A.H.}$

- A. Oblicua será una recta de la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3 + x}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + x}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x$

b) $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = -4 \implies (x_0, y_0) = (0, -4)$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - (x^3 + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x \cdot (x^3 - 3x - 8)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 0$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y + 4 = 0 \cdot (x - 0) \implies r \equiv y = -4$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por \ln la función logaritmo neperiano.

- (1 punto) Determine para qué valores de a la función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} .
- (1 punto) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

- a) ■ Si $x < 1$, $f(x) = x^2 - ax$, que es continua en \mathbb{R} , porque es un polinomio
■ Si $x > 1$, $f(x) = \ln x$, que es continua en $x > 0$, luego continua en $x > 1$.
■ Si $x = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax) = 1 - a$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$
 - $f(1) = 1 - a$

Para que la función sea continua en $x = 1$ se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \implies 1 - a = 0 \implies a = 1$$

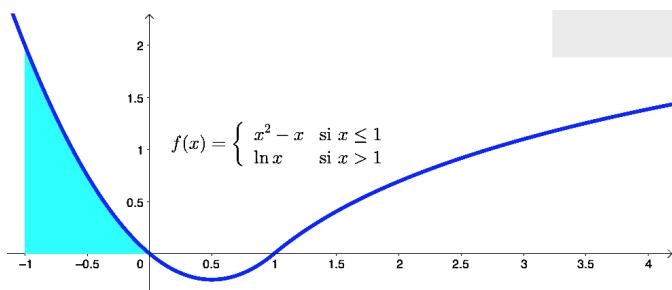
- b) Para $a = 1$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como nos piden el área delimitada por las rectas verticales $x = -1$ y $x = 0$, estaremos en todo momento en la rama $f_1(x) = x^2 - x$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX : $x^2 - x = 0 \implies x = \{0, 1\}$. Lo que define un único recinto de integración $A(-1, 0)$.

$$A = \int_{-1}^0 f_1(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}$$

$$Area = |A| = \frac{5}{6} u^2$$



Ejercicio 4 (2 puntos)

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

- (1 punto) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
- (1 punto) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

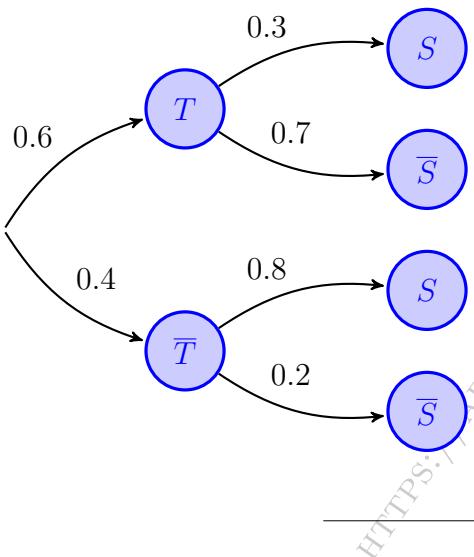
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos

$$T \equiv \text{"El empleado teletrabaja"}$$

$$S \equiv \text{"El empleado tiene trastorno del sueño"}$$



a) $P(\bar{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\bar{S} | T)$
 $= 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

b) $P(\bar{T} | \bar{S}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} \stackrel{*}{=} \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.5} = 0.16$

* $P(\bar{S}) = P((T \cap \bar{S}) \cup (\bar{T} \cap \bar{S}))$
 $= P(T \cap \bar{S}) + P(\bar{T} \cap \bar{S})$
 $= P(T) \cdot P(\bar{S} | T) + P(\bar{T}) \cdot P(\bar{S} | \bar{T})$
 $0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.5$

Ejercicio 5 (2 puntos)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

- a) (1 punto) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96% para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
- b) (1 punto) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 5%

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $n = 500 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{320}{500} = 0.64 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.36 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.96$
 $1 - \alpha = 0.96 \implies \alpha = 0.04 \implies \alpha/2 = 0.02 \implies 1 - \alpha/2 = 0.98 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 2.055$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}} = 0.0441$$

$$I.C.96\%(p) = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) \implies I.C.96\%(p) = (0.5959; 0.6841)$$

b) $p = 0.5 \quad \& \quad q = 1 - p = 0.5 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95 \quad \& \quad E \leq 0.05$
 $1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.05 \implies n \geq 384.16 \implies n = 385$$

_____ o _____

Junio 2021

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

- (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

- Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 3a^2 - 3 = 3 \cdot (a^2 - 1) = 0 \implies a = \{-1, 1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única)}$.

- Si $a = -1 \vee a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right)$
 $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$
 $\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right| = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouché}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Sabiendo que estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de

orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x + (\lambda - 2) - \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\Rightarrow -2y + 2\lambda = 4 \Rightarrow \boxed{y = \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \boxed{z = \lambda}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & a^2 + 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} 3F_3 - 2F_2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3a^2 - 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 - 3 = 0 \\ \boxed{a = \pm 1} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 1\} \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \square & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETER.
- Si $a = 1 \vee a = -1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$ SIST. COMP. INDET.

- b) La resolución del sistema para $a = 1$ no tiene diferencias respecto a lo que hemos hecho anteriormente.

 \circ

Ejercicio 2 (2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1.5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

- Incógnitas $x \equiv$ “kg de almendras en la mezcla”
 $y \equiv$ “kg de avellanas en la mezcla”

- Región Factible Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad x \geq 1.5y & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (40, 60) \\ \textcircled{2} \quad x + y \geq 60 & \rightarrow (0, 60) \quad \& \quad (60, 0) \\ \textcircled{3} \quad x + y \leq 70 & \rightarrow (0, 70) \quad \& \quad (70, 0) \\ \textcircled{4} \quad x \leq 50 & \rightarrow (50, 0) \\ \textcircled{5} \quad y \leq 25 & \rightarrow (0, 25) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- Función objetivo $f(x, y) = x + 2y$

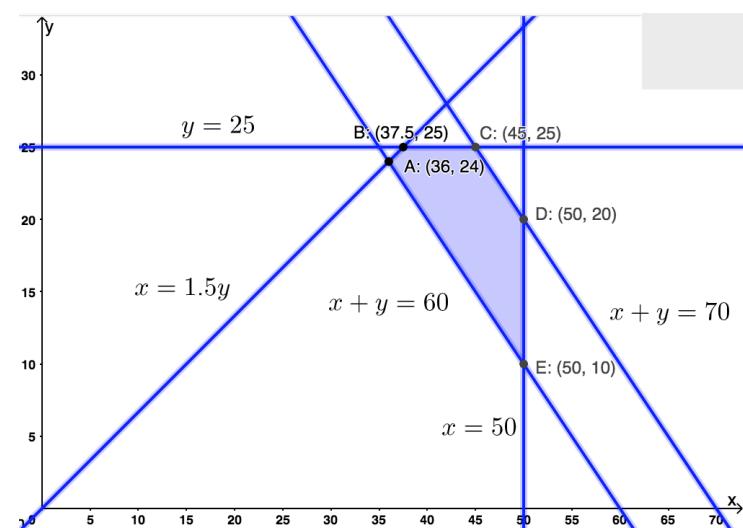
- Región factible

Representamos la región y calculamos los vértices.

- Optimización de F.O.

Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	36	24	84
B	37.5	25	87.5
C	45	25	95
D	50	20	90
E	50	10	70



Por tanto el *máximo beneficio* será de 95 euros y se produce con una mezcla de 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$.

a) (1 punto) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) (1 punto) Calcule $\int_1^2 e^{-x} f(x) dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x = 0 \implies \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x = \{-3, 1\} \\ e^x = 0 \implies \text{No hay solución} \end{cases}$$

Lo que define tres entornos $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, +\infty)$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(-3, 6/e^3)$ y un *mínimo relativo* en $(1, -2e)$.

$$\begin{aligned} b) \int_1^2 e^{-x} f(x) dx &= \int_1^2 e^{-x} \cdot (x^2 - 3) \cdot e^x dx = \int_1^2 (x^2 - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

————— ○ —————

Ejercicio 4 (2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(\overline{B} \mid A) = 0.4 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.9$$

a) (1 punto) Calcule $P(B \mid \overline{A})$.

b) (1 punto) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B . Justifique la respuesta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

$$\text{a)} \quad P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{0.5} = 0.4 \implies P(\overline{B} \cap A) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$$

$$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - P(A \cap B) = 0.2 \implies P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\implies P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.9 + 0.3 - 0.5 = 0.7$$

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.3}{1 - 0.5} = 0.8$$

$$\text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

- (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral \bar{X} no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
- (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117.3444; 124.6556) para μ , determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

- a) $X \equiv$ "Consumo de pan (kg)"

$$X : \mathcal{N}(120, 20) \xrightarrow{n=36} \bar{X} : \mathcal{N}\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}} = 3.33\right)$$

$$P(\bar{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125 - 120}{3.33}\right) = P(Z < 1.5) = 0.9332$$

- b) $n = 81$ & I.C.(117.3444; 124.6556)

$$\bar{x} = \frac{117.3444 + 124.6556}{2} = 121 \quad \& \quad E = \frac{124.6556 - 117.3444}{2} = 3.6556$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{3.6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1.645 \xrightarrow{\text{Tabla}} 1 - \alpha/2 = 0.95$$

$$1 - \alpha/2 = 0.95 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies \alpha = 0.1 \implies 1 - \alpha = 0.9 = 90\%$$

----- o -----