MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2021
- Ordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2021 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \pm 2 \implies \nexists A^{-1}$ si $a = \pm 2$

b) Para $a = 1$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -6 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

> *Se considera la función real de variable real*
>
> $$f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$$
>
> *a) (1 punto) Calcule las asíntotas de $f(x)$.*
>
> *b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a) ▪ `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$(1-x)^2=0 \implies x=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\end{cases}$$

▪ `A. Horizontal`

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(1-x)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

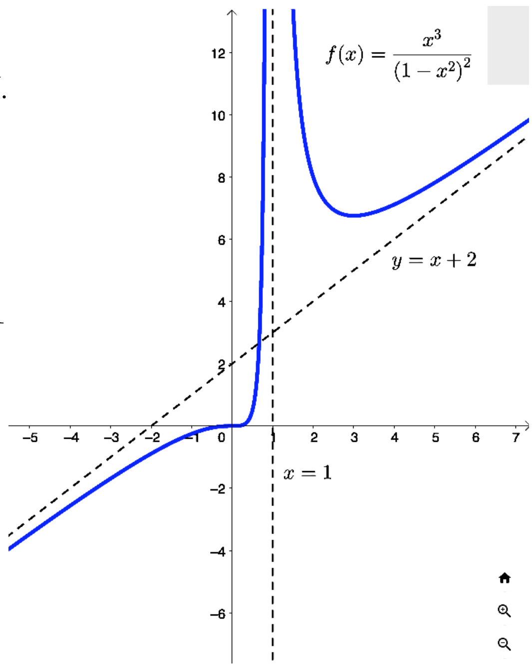
▪ `A. Oblicua` Será una recta: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{(1-x)^2}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+2x^2-x}{(1-x)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x+2}$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2$$



Luego hay una asíntota oblicua en $y=x+2$.

b) Determinamos los puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(1-x)^{\cancel{2}}+x^3\cdot 2\cdot\cancel{(1-x)}}{1-x)^{\cancel{4}3}}=\frac{3x^2-x^3}{(1-x)^3}=0\Rightarrow x^2\cdot(3-x)=0\Rightarrow x=\{0,3\}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Luego la función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$ y *decreciente* en $(1,3)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(3, {}^{27}\!/_4)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determine el valor de a para que la función tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.*

b) *(1 punto) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x^2 + ax\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{ax^2}{2} + C$

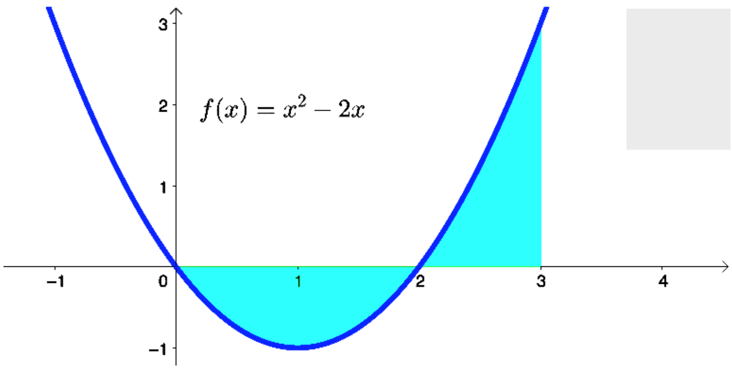
$$\left.\begin{array}{l} F(0)=3 \implies C = 3 \\ F(2) = 9 \implies \dfrac{8}{3} + 2a + C = 9 \implies a = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \implies f(x) = x^2 + \frac{5x}{3}$$

b) Para $a = -2 \implies f(x) = x^2 - 2x$
Hallamos los puntos de corte con el eje OX: $x^2 - 2x = 0 \implies x = \{0, 2\}$
Lo que define dos recintos de integración $A_1 = (0.2)$ y $A_2 = (2, 3)$

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = (9-9) - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) (1 punto) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sea el suceso:

$$N_i \equiv \text{"Sacar una bola negra en la extracción } i\text{"}$$

a) $P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(\overline{N}_1 \cap N_2) = \dfrac{3}{12} \cdot \dfrac{2}{11} + \dfrac{9}{12} \cdot \dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(N_1 \cap N_2 \mid N_2) = \dfrac{P((N_1 \cap N_2) \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{11}$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) (1 punto) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) (1 punto) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución. $X \equiv$ "Peso barra mantequilla (gr)" & $X : \mathcal{N}(\mu, 4)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 4) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 254$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{15}} = 2.024$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{E} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (251.98; 256.02)}$

b) $X : \mathcal{N}(250, 4) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = \mathcal{N}(250, 0.8)$

$P(\overline{X} \geq 248) = P\Big(Z \geq \dfrac{248-250}{0.8}\Big) = P(Z \geq -2.5) = P(Z < 2.5) = 0.9938$

Junio 2021 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

a) (1 punto) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \& \quad x + y \leq 3 \quad \& \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Solución.

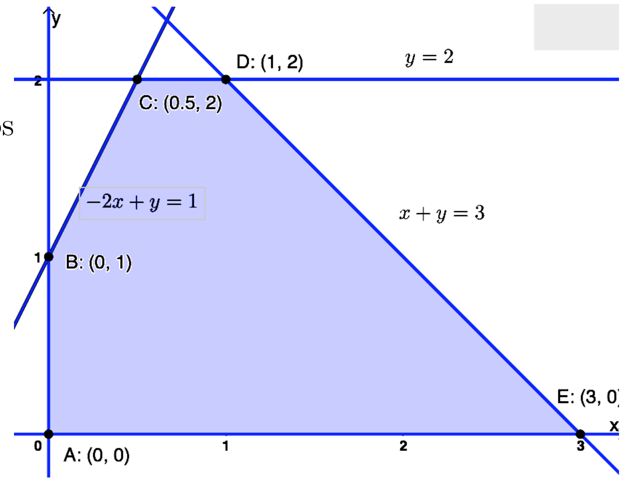
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ -2x + y \leq 1 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (2,5) \\ ② \ 0 \leq y \leq 2 & \rightarrow (0,2) \\ ③ \ x + y \leq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (3,0) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = x + y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	1	1
C	0.5	2	2.5
D	1	2	3
E	3	0	3

Por tanto el *mínimo* de $f(x, y)$ se produce en $A(0, 0)$ y vale 0, mientras que el *máximo* se produce en los puntos $D(1, 2)$ y $E(3, 0)$ y vale 3.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valore de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Nº de juguetes de 1 €"} \\ y &\equiv \text{"Nº de juguetes de 2 €"} \\ z &\equiv \text{"Nº de juguetes de 5 €"} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{5} = y \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{3} \\ x + 2y + 5z = 228 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 228 \\ 5y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -456 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 + 7F_2 \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 228 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -57 & -2280 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2\cdot 8 + 5 \cdot 40 = 228 \\ \Rightarrow 5y - 40 = 0 \\ \Rightarrow -57z = -2280 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 40 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) *(1 punto) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.*

b) *(1 punto) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $(x_0, y_0) = (1, 2) \implies f(1) = 2 \implies a + b + 2 = 2 \implies \odot\ a + b = 0$

$f'(x) = 2ax - \dfrac{b}{x^2} + 2$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = -4 \implies 2a - b + 2 = -4 \implies \odot\ 2a - b = -6$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{c} a = -2 \\ b = 2 \end{array}}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (x_0, y_0) = (1, 2) \implies f(1) = 2 \implies \odot\ a + b = 0 \\ f''(x) = 2a + \dfrac{2b}{x^3} \implies f''(1) = 0 \implies \odot\ 2a + 2b = 0 \end{array}\right\} \implies \boxed{a = -b}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos con: $P(A) = \dfrac{2}{5}$ & $P(B) = \dfrac{1}{2}$ & $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{4}{5}$

a) *(1 punto) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.*

b) *(1 punto) ¿Son A y B incompatibles?*

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{5} \implies P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{5}$

b) $P(A \cap \overline{B}) = \underbrace{P(A)}_{2/5} - P(A \cap B) = \dfrac{2}{5} \implies P(A \cap B) = 0 \implies A$ y B son incompat.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) (1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0.2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) (1 punto) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$P \equiv \text{"Proporción de cajas grandes sobre el total"}$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad p = 0.2 \qquad \& \qquad q = 1 - p = 0.8 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \leq 0.08 \implies n \geq 165.77 \implies \boxed{n = 166}$$

b) $n = 200 \quad \& \quad \hat{p} = \frac{25}{200} = 0.125 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.875 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{200}} = 0.046$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.079; 0.171)}$$