MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2019
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) (1 punto) Determínese si las matrices C y $(C^\top \cdot C)$, donde $C^\top$ denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo calcúlense las inversas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos $|A - 2B|$ y vemos para qué valor de k se anula.

$$A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2B| = 2 \cdot (k-2) - 24 + 0 - (0 + 1 + 0) = 2k - 29 = 0 \implies \boxed{k = 29/2}$$

b) Para que una matriz tenga inversa ha de ser cuadrada y tener determinante no nulo.
Como $C_{3\times 2} \implies \nexists C^{-1}$

$$C^\top \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|C^\top \cdot C\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \exists \left(C^\top \cdot C\right)^{-1}$$

$$\left(C^\top \cdot C\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas.
Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene.
Para que haya suficiente para todos los asistentes tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) (1 punto) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) (1 punto) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

	Helado	Horchata	Restricción
h trabajo/litro	1	2	≤ 20
	≤ 15		

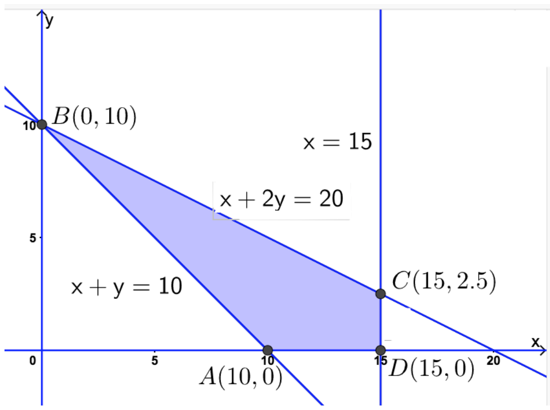
- `Incógnitas`
$$x \equiv \text{“litros de helado”}$$
$$y \equiv \text{“litros de horchata”}$$

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \geq 10 & \to (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ ② \; x + 2y \leq 20 & \to (0,10) \quad \& \quad (20,0) \\ ③ \; x \leq 15 & \to (15,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x) = 25x + 12y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	10	0	250
B	0	10	120
C	15	2.5	405
D	15	0	375

Por tanto el *máximo* beneficio se produce en el punto $C(15, 2.5)$ y vale 405 euros.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) (1 punto) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,3)$.

b) (1 punto) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad y convexidad de esta función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x^2 - 4x - 6)\,dx = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + k$

$(0,3) \in f(x) \implies f(0) = 3 \implies k = 3 \implies \boxed{f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 3}$

b) Hallamos los puntos singulares

$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \implies x = -1$ y $x = 3$

$$f''(x) = 4x - 4 \implies \begin{cases} f''(-1) = -8 < 0 & \Rightarrow (\cap) \Rightarrow \text{Máximo en } (-1, 19/3) \\ f''(3) = 8 > 0 & \Rightarrow (\cup) \Rightarrow \text{Minimo en } (3, -15) \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 4 = 0 \xrightarrow{P.I.} x = 1 \implies \begin{cases} \text{Si } x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 & \xrightarrow{(\cap)} \text{Cóncava} \\ \text{Si } x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 & \xrightarrow{(\cup)} \text{Convexa} \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.8 \quad y \quad P(A \cap \overline{B}) = 0.1$$

a) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{0.1}{1 - 0.8} = 0.5$

$P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0.6 \cdot (1 - 0.8) = 0.12$

Como $P(A \cap \overline{B}) \neq P(A) \cdot P(\overline{B}) \implies$ los sucesos A y $\overline{B}$ no son independientes

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) (1 punto) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99.2 % para estimar el precio medio mensual μ, de las clases de Pilates.

b) (1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

Nos dice que la varianza $\sigma^2 = 49 \implies \sigma = 7$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 7) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{7}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(\mu, 0.875)$

$1 - \alpha = 0.992 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.65 \qquad \& \qquad \overline{x} = 34$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.65 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{64}} = 2.32$

$I.C._{992\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{992\,\%}(\mu)(31.68; 36.32)}$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E < 3$

$1 - \alpha = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \dfrac{7}{\sqrt{n}} < 3 \implies n > \left(\dfrac{1.96 \cdot 7}{3}\right)^2 = 20.92 \implies \boxed{n = 21 \text{ centros}}$

Junio 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema para $m=1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -m & 0 \end{array}\right)$$

a) Los sistemas homogéneos son siempre compatibles, pues tienen al menos la solución trivial. Para tener soluciones distintas de la trivial el sistema ha de ser Compatible Indeterminado, lo que implica que ran$A < 3$, es decir que $|A| = 0$.

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \implies m = \{-1, 1\}$$

Si $m = \{-1, 1\}$ el sistema es SCI (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema cuando $m = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -x+0+\lambda=0 \ \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y=0 \ \Rightarrow & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=\lambda \ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x=\lambda & \\ y=0 & , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda & \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

a) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.*

b) *(1 punto) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.*

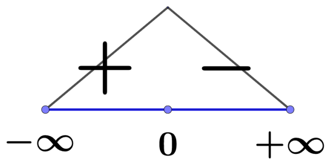
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2} = 0 \implies x = 0$$

signo $f'(x)$



$$\begin{cases} f'(x) > 0 \; \forall x < 0 & \textit{Creciente} \\ f'(x) < 0 \; \forall x > 0 & \textit{Dereciente} \end{cases}$$

- `A. Vertical` $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \implies \nexists$Asíntota Vertical
- `A.Horizontal` $\quad y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{8}{x^2+4} = \left[\frac{8}{\infty}\right] = 0$

b) El punto de tangencia es
$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(2) = 1$

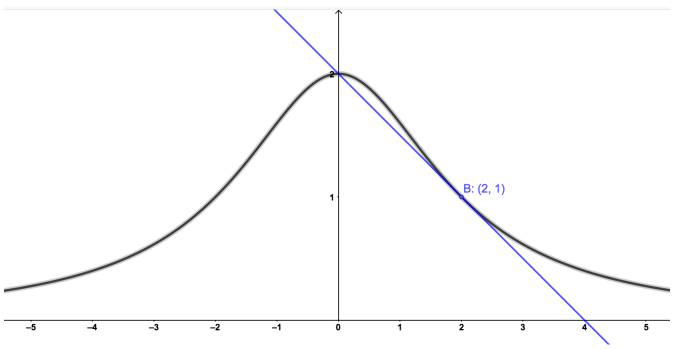
$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{2}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{r \equiv x + 2y - 4 = 0}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores del parámetro k.

b) (1 punto) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

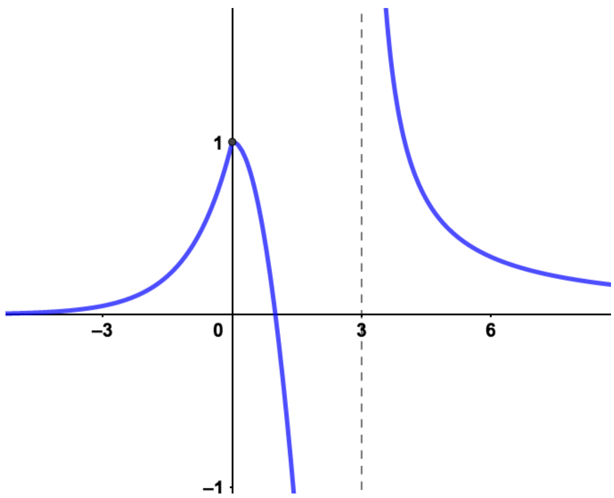
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Tenemos que estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f(x) = e^x + k$ que es continua por ser la suma de dos funciones continuas (exponencial y constante).
- Si $0 < x < 3$, $f(x) = 1 - x^2$ que es continua por ser un polinomio.
- Si $x > 3$, $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$, luego es continua en $x > 3$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^x + k) = 1 + k$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - x^2\right) = 1$
  - $f(0) = e^0 + k = 1 + k$

  Luego si $1 + k = 1 \implies k = 0$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$. Por el contrario, si $k \neq 0$ hay una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(1 - x^2\right) = -8$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \left[\dfrac{1}{0}\right] = +\infty$
  - $f(3) = 1 - 3^2 = -8$ Luego en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito



b) Dividimos el área en dos recintos: $A_1(-1,0)$ y $A_2(0.1)$
e^x no se anula en A_1 y $1-x^2$ tampoco se anula en A_2, de esta forma tenemos:

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 1 - x^2\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Bigg]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Area} = |A_1| + |A_2| = 1 - \frac{1}{e} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} = 1.299\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) (1 punto) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

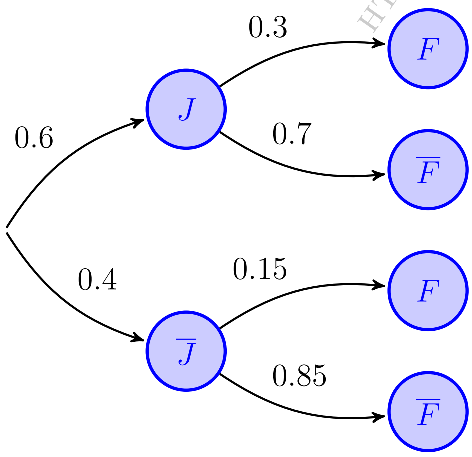
b) (1 punto) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$J \equiv$ "El niño juega más de lo recomendado"
$F \equiv$ "El niño tiene fracaso escolar"



a) $$P(F) = P\Big((J\cap F)\cup(\overline{J}\cap F)\Big)$$
$$= P(J\cap F) + P(\overline{J}\cap F)$$
$$= P(J)\cdot P(F\mid J) + P(\overline{J})\cdot P(F\cap \overline{J})$$
$$= 0.6\cdot 0.3 + 0.4\cdot 0.15 = 0.24$$

b) $$P(\overline{J}\mid F) = \frac{P(\overline{J}\cap F)}{P(F)} = \frac{P(\overline{J})\cdot P(F\mid \overline{J})}{P(F)}$$

$$P(\overline{J}\mid F) = \frac{0.4\cdot 0.15}{0.24} = 0.25$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5° y 6° de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1.5$ kilogramos.

a) (1 punto) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0.49 kilogramos.
Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu; 1,5) \xrightarrow{n=?}$ I.C. de amplitud $2E = 0.49$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \frac{0.49}{2} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \implies n = \left(\frac{1.96 \cdot 1.5}{0.245}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n = 144 \text{ mochilas}}$$

b) $X : \mathcal{N}(6; 1.5) \xrightarrow{n=225} \overline{X} : \mathcal{N}\left(6; \frac{1.5}{\sqrt{225}}\right) = \mathcal{N}(6; 0.1)$

$$P(\overline{X} \geq 5.75) = P\left(Z \geq \frac{5.75-6}{0.1}\right) = P(Z \geq -2.5) = P(Z \leq 2.5) = 0.9938$$

———————— ∘ ————————