MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2015
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2015
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a - 4 = 0 \implies a = -2$$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos para $a = 1$ por el método de Gauss, sabiendo estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\ F_1 \leftrightarrow F_3\ \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + y - 1 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 4 \cdot (-1) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = -3 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) *(1 punto) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.*

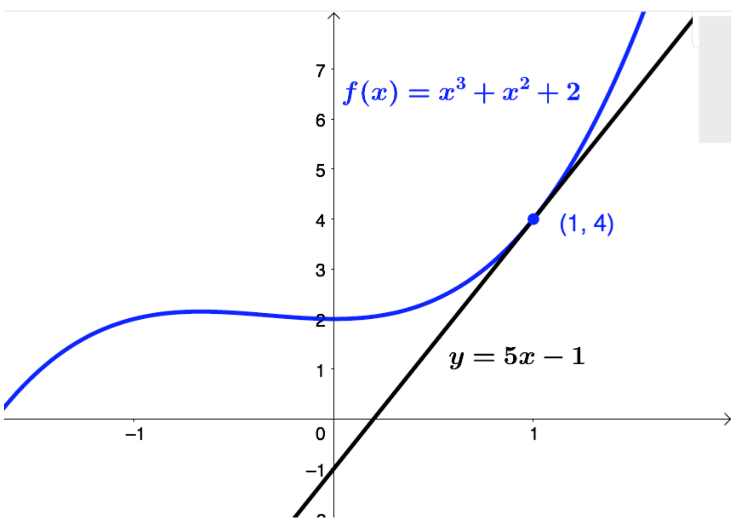
b) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

a)
- $f'(x) = 3x^2 + 2x \implies f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(3x^2 + 2x\right) dx = x^3 + x^2 + C$
- Pasa por $(1, 4) \implies f(1) = 4 \implies f(1) = 1^3 + 1^2 + C = 4 \implies C = 2$

Por lo tanto $\boxed{f(x) = x^3 + x^2 + 2}$



b) $(x_0, y_0) = (1, 4)$

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 5$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 4 = 5 \cdot (x - 1)$

$\boxed{r \equiv y = 5x - 1}$

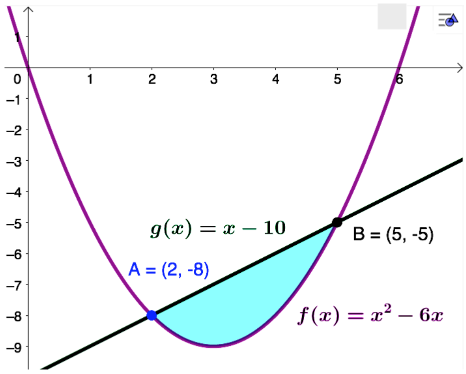
Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Sean las funciones reales de variable real*
>
> $$f(x) = x^2 - 6x \qquad \& \qquad g(x) = x - 10$$
>
> *a) (1 punto) Represéntense gráficamente las funciones f y g.*
>
> *b) (1 punto) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de las funciones f y g.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)*

Solución.

a)
- $f(x)$ es una parábola convexa que corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 6$ y cuyo vértice es $x_v = -\dfrac{-6}{2} = 3 \implies y_v = f(3) = -9$
- $g(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(0, -10)$ y $(10, 0)$

b) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 6x - (x - 10) = x^2 - 7x + 10 = 0 \implies x = \{2, 5\}$, lo que determina un único recinto de integración $A_1 = (2, 5)$



$$A_1 = \int_2^5 h(x)\, dx = \int_2^5 \left(x^2 - 7x + 10\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x \Big]_2^5 = \left(\frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 50\right)$$
$$- \left(\frac{8}{3} - 14 + 20\right) = -\frac{9}{2}$$

$$Area = |A_1| = \frac{9}{2}\ u^2$$

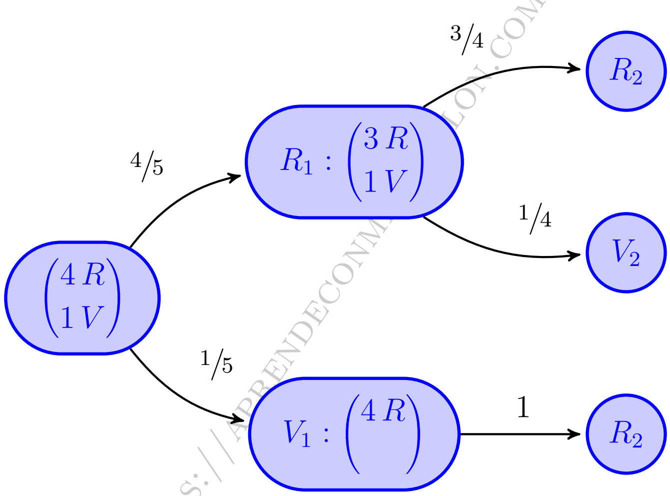
Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas.*
> *Calcúlese la probabilidad de que:*
>
> *a) (1 punto) Las dos bolas sean del mismo color.*
>
> *b) (1 punto) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{roja} \text{ en la extracción } i\text{”}$$
$$V_i \equiv \text{“Sacar bola } \textit{verde} \text{ en la extracción } i\text{”}$$



a) $P(\text{mismo color}) = P\big((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)\big) = P(R_1 \cap R_2) + \cancelto{0}{P(V_1 \cap V_2)}$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

b) $P(V_1 \mid R_2) = \dfrac{P(V_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap R_2)}$

$$= \frac{P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(R_2 \mid V_1)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 1}{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del $95\,\%$. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del $80\,\%$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Tiempo de reacción } (ms)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 250)$$

a) $$I.C. = (701; 799) \implies \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{701+799}{2} = 750 \\[2ex] E = \dfrac{799-701}{2} = 49 \end{cases}$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{250}{49}\right)^2 = 100$$

b) $E = ? \qquad \& \qquad n = 25 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.8$

$$1-\alpha = 0.8 \implies \alpha = 0.2 \implies \alpha/2 = 0.1 \implies 1-\alpha/2 = 0.9 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.285$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64.25$$

Junio 2015

Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho 6 toneladas de pienso del tipo A y como máximo 4 toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Producción diaria de pienso tipo A (ton.)"
  $y \equiv$ "Producción diaria de pienso tipo A (ton.)"

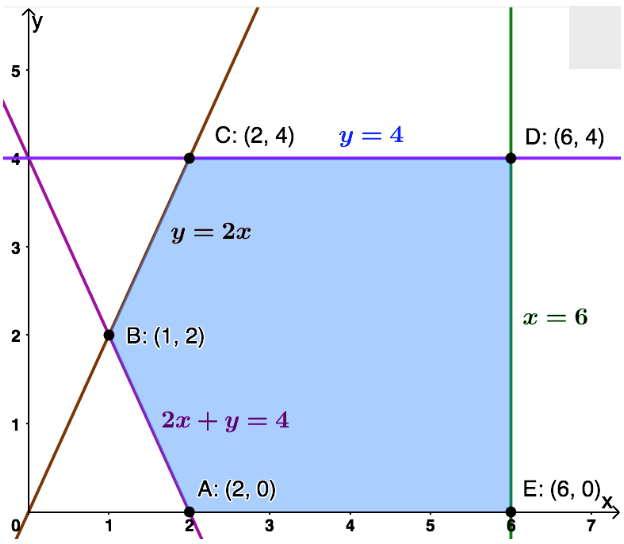
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x \leq 6 & \to (6,0) \\ ② \; y \leq 4 & \to (0,4) \\ ③ \; y \leq 2x & \to (0,0) \quad \& \quad (2,4) \\ ④ \; 2x + y \geq 4 & \to (0,4) \quad \& \quad (2,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 1000x + 2000y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice



Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	0	2000
B	1	2	5000
C	2	4	10000
D	6	4	14000
E	6	0	6000

El *coste mínimo* es de 2000 euros y se obtiene produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna de B.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) (1 punto) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = 8 - 4k = 0 \implies k = 2$

- Si $k \neq 2 \implies \text{ran}(A) = 3$
- Si $k = 2 \implies \text{ran}(A) < 3$, y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

b) Para $k = 3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A| = 8 - 4 \cdot 3 = -4 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x < 2 \\ 3x + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcúlese $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a)
- $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot \cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3}$$
  $$= \frac{4}{-1} = -4$$

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (3x + m) = 6 + m$
- $f(2) = 3 \cdot 2 + m = 6 + m$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2 \implies \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, luego

$$-4 = 6 + m \implies \boxed{m = -10}$$

b)
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x + m) = +\infty$

—————— ∘ ——————

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A \cap B) = 0.3 \qquad \& \qquad P(A \cap \overline{B}) = 0.2 \qquad \& \qquad P(B) = 0.7$$

Calcúlense:

a) (1 punto) $P(A \cup B)$

b) (1 punto) $P(B \mid \overline{A})$

Nota: *$\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0.2 + 0.3 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.3}{1 - 0.5} = 0.8$

—————— ∘ ——————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) *(1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.*

b) *(1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100$ h?*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Duración componente (h)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=81} \overline{x} = 8000$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1000}{\sqrt{81}} = 286.11$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (7713.89; 8286.11)}$$

b) $X : \mathcal{N}(8100, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8100, \dfrac{1000}{\sqrt{100}} = 100\right)$

$$\begin{aligned} P(7904 \le \overline{X} \le 8296) &= P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) = P(-1.96 \le Z \le 1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - P(Z \le -1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - P(Z \ge 1.96) \\ &= P(Z \le 1.96) - \left[1 - P(Z \le 1.96)\right] \\ &= 2 \cdot P(Z \le 1.96) - 1 = 2 \cdot 0.9750 - 1 = 0.95 \end{aligned}$$