MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2014

- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2014

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlese $\left(A^{\top} B\right)^{-1}$*, donde* $A^{\top}$ *denota a la traspuesta de la matriz* A*.*

b) (1 punto) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a) $$\left(A^{\top} B\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_2 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow y = -2 \quad\;\; \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = -2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0 \quad \& \quad x + y \leq 6 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \leq 3$$

a) *(1 punto) Represéntese la región S.*

b) *(1 punto) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S, indicando los puntos donde se alcanzan.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

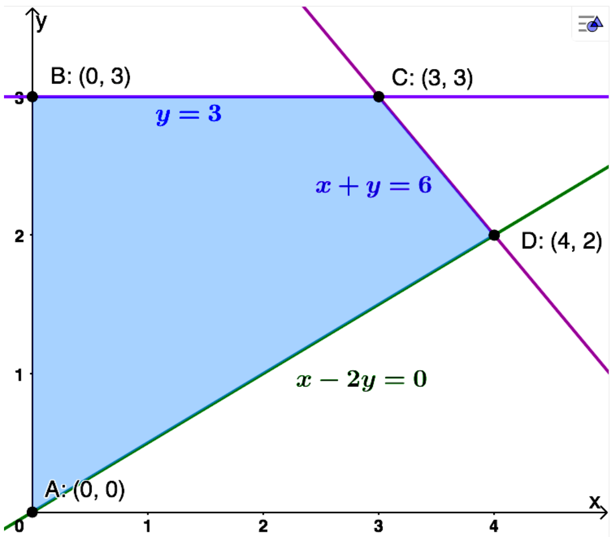
$$\begin{cases} ① \; x - 2y \leq 0 & \to (0,0) \quad \& \quad (6,3) \\ ② \; x + y \leq 6 & \to (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ③ \; y \leq 3 & \to (3,0) \\ x \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 5x - 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	3	-6
C	3	3	9
D	4	2	16



El *mínimo* de la función $f(x, y)$ es igual a -6 y se produce en el punto $B : (0, 3)$.
El *máximo* de la función $f(x, y)$ es igual a 16 y se produce en el punto $D : (4, 2)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+a & si\ x < 1 \\ x^2 - 2 & si\ 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_1^3 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < 1,\ f(x) = x + a$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio.
- Si $1 < x < 3,\ f(x) = x^2 - 2$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio.
- Si $x > 3,\ f(x) = x + 3$, que es continua en $\mathbb{R}$ porque es un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+a) = 1 + a$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2-2) = -1$
  - $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies 1 + a = -1 \implies \boxed{a = -2}$
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2-2) = 7$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+b) = 3 + b$
  - $f(3) = 3 + b$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$

  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \implies 3 + b = 7 \implies \boxed{b = 4}$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2-2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = (9-6) - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{14}{3}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.5 \quad \& \quad P(B \mid A) = 0.5$$

Calcúlense:

a) *(1 punto)* $P(B)$

b) *(1 punto)* $P(A \mid \overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{0.4} = 0.5 \implies P(A \cap B) = 0.2$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\implies P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0.5 + 0.2 - 0.4 \implies P(B) = 0.3$

b) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{1 - 0.3} = 0.286$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Longitud de los gusanos (mm)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=48} \overline{x} = 36$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{48}} = 0.849$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (35.15; 36,85)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E \leq 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(1.645 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 24.35 \implies \boxed{n = 25}$$

Junio 2014
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a - 3 = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}\ \text{incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = -1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 2 - (-1) = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 5 \cdot (-1) = -7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}}$$

———— ○ ————

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

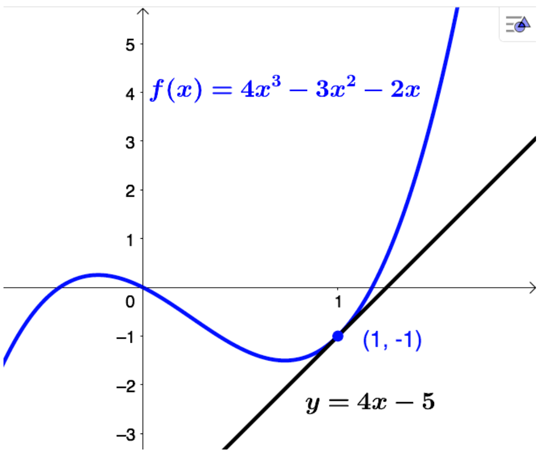
b) (1 punto) Calcúlese $\int_2^3 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\begin{aligned} x_0 = 1 \implies y_0 &= f(x_0) = f(1) = -1 \\ &\implies (x_0, y_0) = (1, -1) \\ f'(x) &= 12x^2 - 6x - 2 \\ m_r &= f'(x_0) = f'(1) = 4 \\ r \equiv y - y_0 &= m_r \cdot (x - x_0) \\ y + 1 &= 4 \cdot (x - 1) \\ r \equiv y &= 4x - 5 \end{aligned}$$



b) $$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)\,dx = x^4 - x^3 - x^2\Big]_2^3$$

$$= (81 - 27 - 9) - (16 - 8 - 4) = 41$$

———— ○ ————

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) *(1 punto) Determínense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

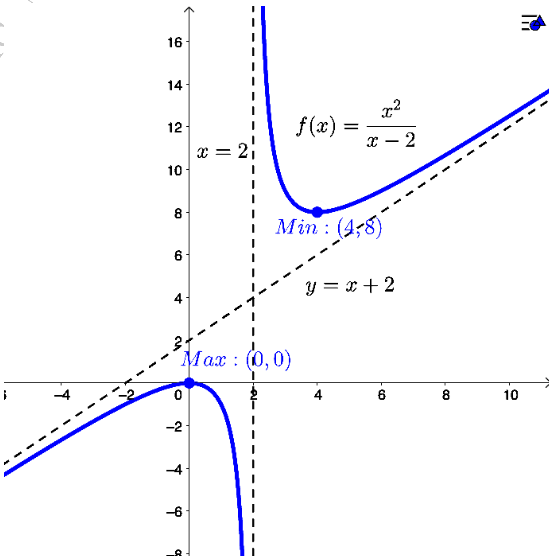
$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2$$



Luego hay una asíntota oblicua en $y = x + 2$.

b) $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \implies x^2 - 4x = 0 \implies x = \{0, 4\}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 4)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(4, 8)$ y un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) (1 punto) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

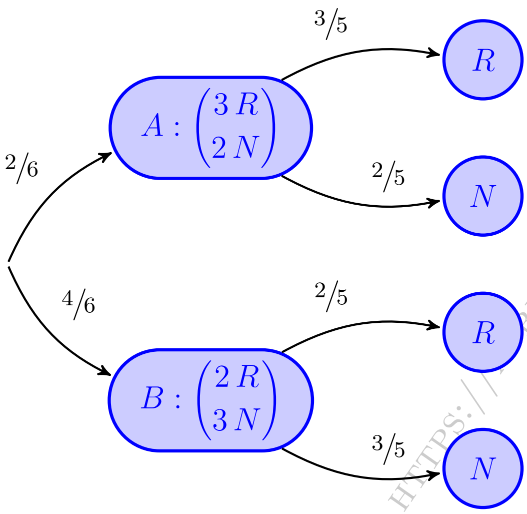
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "Sacar 1 ó 2 en el dado" $\qquad B \equiv$ "Sacar más de 2 en el dado"

$R \equiv$ "Extraer bola roja" $\qquad N \equiv$ "Extraer bola negra"



a) $$P(R) = P\big((A\cap R)\cup(B\cap R)\big) = P(A\cap R) + P(B\cap R) = P(A)\cdot P(R\mid A) + P(B)\cdot P(R\mid B) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b) $$P(A\mid R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R\mid A)}{P(R)} = \frac{{}^2\!/_6\cdot{}^3\!/_5}{{}^7\!/_{15}} = \frac{3}{7}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16.33; 19.27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del $95\,\%$. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la meustra elegida.

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del $95\,\%$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2014 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo mensual de leche } (\ell)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n} I.C._{95\,\%}(\mu) = (16.33; 19.27)$

$$\overline{x} = \frac{16.33 + 19.27}{2} = 17.8 \qquad \& \qquad E = \frac{19.27 - 16.33}{2} = 1.47$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{3}{1.47}\right)^2 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $E = ?$ $\quad \& \quad n = 64 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}} = 0.735$$