

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JULIO 2021

- Extraordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Julio 2021 (Extraordinario)

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz X que satisface $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -a - 1 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ & $|A| = -2 - 1 = -3$

$$\text{Adj}A^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^T = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0.5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

- a) (1 punto) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
- b) (1 punto) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

Solución.

■ Incógnitas

$x \equiv$ “m de cable A2020”

$y \equiv$ “m de cable B2020”

■ Región Factible Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

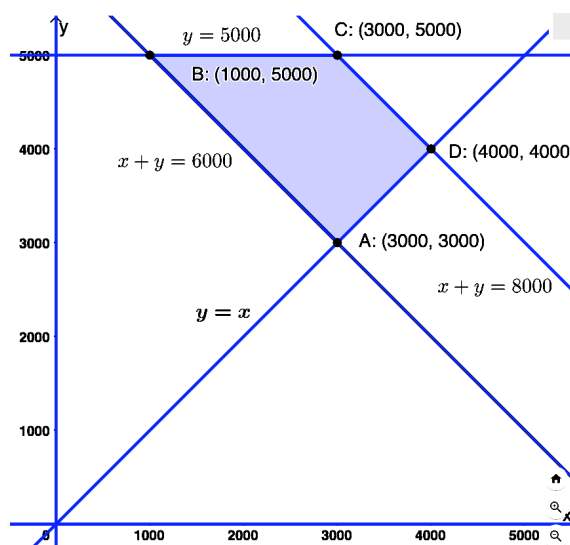
$$\begin{cases} \textcircled{1} x + y \geq 6000 & \rightarrow (0, 6000) \quad \& \quad (6000, 0) \\ \textcircled{2} y \leq 5000 & \rightarrow (0, 5000) \\ \textcircled{3} x + y \leq 8000 & \rightarrow (8000, 0) \quad \& \quad (0, 8000) \\ \textcircled{4} y \geq x & \rightarrow (0, 0) \quad \& \quad (5000, 5000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

■ Función objetivo $f(x, y) = 2x + 0.5y$

■ Región factible Representamos la región y calculamos los vértices.

■ Optimización de F.O. Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	3000	3000	7500
B	1000	5000	4500
C	3000	5000	8500
D	4000	4000	10000



Por tanto el *coste mínimo* es de 4500 euros y se produce con una producción de 1000 m de A2020 y 5000 m de B2020.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
- b) (1 punto) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) Continuidad:

- Si $x < 3$, $f(x) = x^2 - x - 1$, que es continua en \mathbb{R} , porque es un polinomio
- Si $x > 3$, $f(x) = \frac{3a}{x}$, que es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego continua en $x > 3$.
- Si $x = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3a}{x} = a \\ f(3) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \text{ será continua en } x = 3 \text{ si:} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \\ \Rightarrow a = 5 \end{array} \right\}$$

Derivabilidad: Para $a = 5$ la función será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{15}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -\frac{15}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Como } f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \end{array} \right\}$$

b) Para $a = 1$ la función $f(x)$ será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f_1(x_0) = f_1(1) = -1$$
$$\Rightarrow (x_0, y_0) = (1, -1)$$

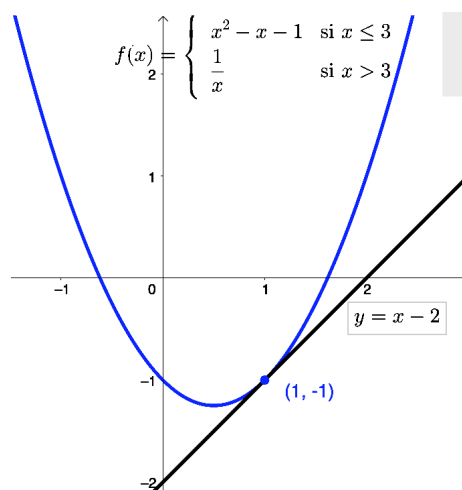
$$f'_1(x) = 2x - 1$$

$$m_r = f'_1(x_0) = f'_1(1) = 1$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y + 1 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$r \equiv y = x - 2$$



Ejercicio 4 (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(\overline{B}) = 0.8 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$$

a) (1 punto) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$\text{a) } P(\overline{B}) = 0.8 \implies P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.9 \implies P(A \cap B) = 0.1$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

$$P(A \cap B) = 0.1 = P(A) \cdot P(B) \implies A \text{ y } B \text{ son sucesos independientes.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\overline{A} \mid \overline{B}) &= \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{P(\overline{B})} = \frac{1 - (0.5 + 0.2 - 0.1)}{0.8} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

- a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) (1 punto) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, \bar{X} , esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los huevos (gr)"} \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \bar{x} = 60$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3.506$$

$$I.C._{95\%}(\mu) = (\bar{x} - E; \bar{x} + E) \implies I.C._{95\%}(\mu) = (56.494; 63.506)$$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \bar{X} : \mathcal{N}\left(59, \frac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \bar{X} < 61) &= P\left(\frac{57 - 59}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{61 - 59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - P(Z > 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - [1 - P(Z < 0.79)] = 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704 \end{aligned}$$

_____ o _____

Julio 2021 (Extraordinario)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{array} \right\}$$

- a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .
 b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHE

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = -a + 1 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$\begin{aligned}
 A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 + F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \\
 \sim \left[\begin{array}{c} 3F_3 + F_2 \end{array} \right] &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - 6 + 4 = 0 \\ 3y + 4 = 1 \\ -2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{matrix}}
 \end{aligned}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right) \\
 \sim \left[\begin{array}{c} F_2 + F_1 \end{array} \right] &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right) \stackrel{a \neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} F_3 + F_2 \end{array} \right] \\
 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right) &\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ \boxed{a=1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMP. DETERMINADO}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO}$$

- b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 3$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + 4 - 6 = 0 \\ z - 3 = 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ z = 4 \\ y = -1 \end{matrix}}$$

————— o —————

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) (1 punto) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $(x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- **A. Vertical** Buscamos las asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio de la función

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = \infty \end{cases}$$

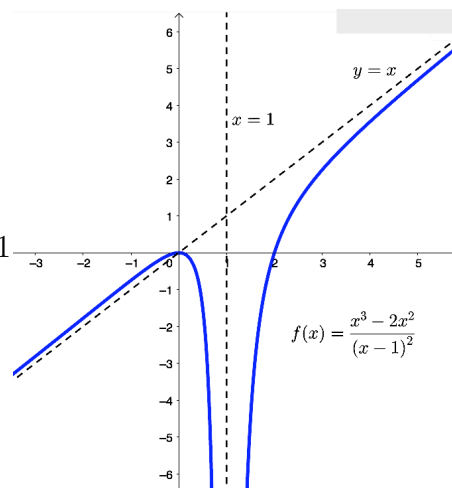
- **A. Horizontal**

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists A.H.$$

- **A. Oblicua** Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x^3 - 2x^2 + x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{(x-1)^2} \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \implies A.O. \text{ en } y = x \end{aligned}$$



b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot (x-1)^2 - (x^3 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3} = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \implies x \cdot (x^2 - 3x + 4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

- a) (1 punto) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
- b) (1 punto) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 + 8x \implies f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 8x) dx = x^3 + 4x^2 + C$

$$f(1) = 11 \implies 1 + 4 + C = 11 \implies C = 6 \implies \boxed{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6}$$

- b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x \cdot (3x + 8) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 8 = 0 \implies x = -8/3 \end{cases}$$

	$(-\infty, -8/3)$	$(-8/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -8/3) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-8/3, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 6)$ y un *máximo relativo* en $(-8/3, 418/27)$.

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B , siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B . Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0.02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0.06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

- a) (1 punto) No sufra fracaso escolar.
- b) (1 punto) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

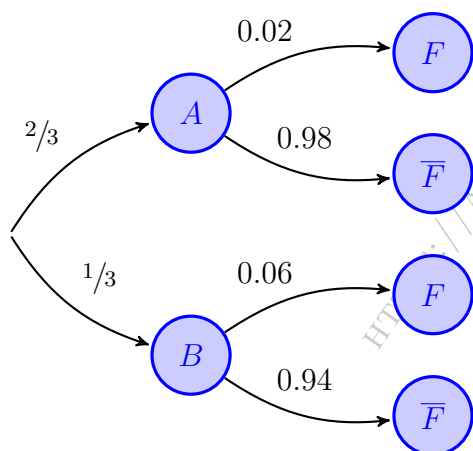
Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El alumno reside en el municipio A "

$B \equiv$ "El alumno reside en el municipio B "

$F \equiv$ "El alumno tiene fracaso escolar"

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot P(B) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\bar{F}) &= P((A \cap \bar{F}) \cup (B \cap \bar{F})) \\ &= P(A \cap \bar{F}) + P(B \cap \bar{F}) \\ &= P(A) \cdot P(\bar{F} | A) + P(B) \cdot P(\bar{F} | B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A | F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F | A)}{1 - P(\bar{F})} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.4 \end{aligned}$$

_____ o _____

Ejercicio 5 (2 puntos)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

- a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
- b) (1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, \bar{X} , sea menor que 30.5 minutos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{"Tiempo para hacer el test (minutos)"} \quad \& \quad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

$$\text{a) } n = ? \quad \& \quad E < 1 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1.96 \cdot 3)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

$$\text{b) } X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \bar{X} : \mathcal{N}\left(32, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0.75)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 30.5) &= P\left(Z < \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) \\ &= 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

_____ o _____