MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2019
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2019
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) (1 punto) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz cuadrada A tenga inversa el determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^2 + 0 + 4 - (2a + 4 + 0) = a^2 - 2a = a \cdot (a - 2) = 0 \implies \boxed{a = \{0, 2\}}$$

b) Para $a = 3$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuya inversa hallaremos por el método de los adjuntos.

$$|A| = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \qquad \& \qquad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\, A^{\top} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) (1 punto) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) (1 punto) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) $m_r = f'(x) = 0 \implies 6x^2 - 8 = 0 \implies x = \pm\sqrt{4/3}$

b) Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX.

$$2x^3 - 8x = 0 \implies 2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \implies x = \{-2, 0, 2\}$$

lo que me genera un recinto de integración $A_1 = (0, 2)$. De esta forma:

$$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2x^3 - 8x)\,dx = \left.\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{8 \cdot 2^2}{2} - 0 = -8$$

Area $= |A_1| = |-8| = 8\ u^2$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & si\ x < 3 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de f.

b) (1 punto) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$.

- Si $x < 3$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$, luego no es continua en $x = -3$ en donde la función tiene una asíntota vertical.
- Si $x > 3$ $f(x) = x^2 - 4$ que es continua por ser un polinomio
- Si $x = 3$
  - $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{27}{0}\right] = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - 4 = 5$
- $f(3) = 3^2 - 4 = 5$

Luego en $x = 3$ la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

De esta forma $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

b) Asíntotas Verticales: las analizamos en $x = \pm 3$

- $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} & \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} & \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} & \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} & x^2 - 4 = 5 \end{cases}$

Asíntotas Horizontales: No hay asíntotas horizontales

- $y = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\infty \implies \nexists$ A.H.
- $y = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 4 = +\infty \implies \nexists$ A.H.

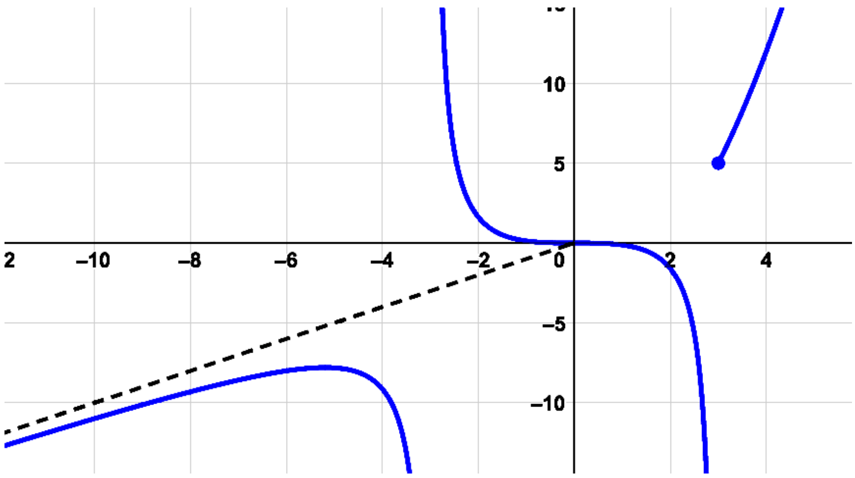
Asíntotas Oblicuas:

- Cuando $x \to -\infty$ la asíntota oblicua es

$$y = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \lim_{x\to -\infty} x + \frac{9x}{x^2-9} \implies y = x + 0^-$$

- Cuando $x \to +\infty$ no hay asíntota oblicua pues

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio.

a) (1 punto) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

E ≡ El alumno hace ejercicio regularmente
D ≡ El alumno desayuna diariamente

En el enunciado nos dicen que.

$$P(E) = \frac{2}{5} \qquad \& \qquad P(D) = \frac{2}{3} \qquad \& \qquad P(E \mid D) = \frac{9}{25}$$

a) Dos sucesos E y D son independientes si $P(E \cap D) = P(E) \cdot P(D)$.

$$P(E \mid D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{9}{25} \implies P(E \cap D) = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{25}$$

$$P(E) \cdot P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \neq \frac{6}{25} \implies \text{ los sucesos } D \text{ y } E \text{ no son independientes}$$

b) $$P(\overline{E} \cap \overline{D}) = P(\overline{E \cup D}) = 1 - P(E \cup D) = 1 - [P(E) + P(D) - P(E \cap D)]$$
$$= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{6}{25}\right) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) *(1 punto) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.*

b) *(1 punto) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

Sea $X \equiv$ Peso de los paquetes de harina, entonces $X : \mathcal{N}(\mu, 25)$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 560 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}} = 12.65$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (547.35; 572.65)}$$

b) $X : \mathcal{N}(560, 25) \xrightarrow{n=50} \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(560, \dfrac{25}{\sqrt{50}}\right) = \mathcal{N}(560, 3.54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565-560}{3.54}\right) = P(Z \geq 1.41) = 1 - P(Z \leq 1.41)$$

$$= 1 - 0.9207 = 0.0793$$

Julio 2019
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características.
El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

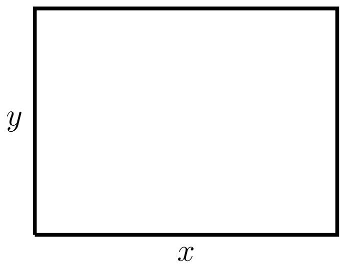
a) (1 punto) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensione del estanque.

b) (1 punto) Si se desea que el estanque, respetando esas características, tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

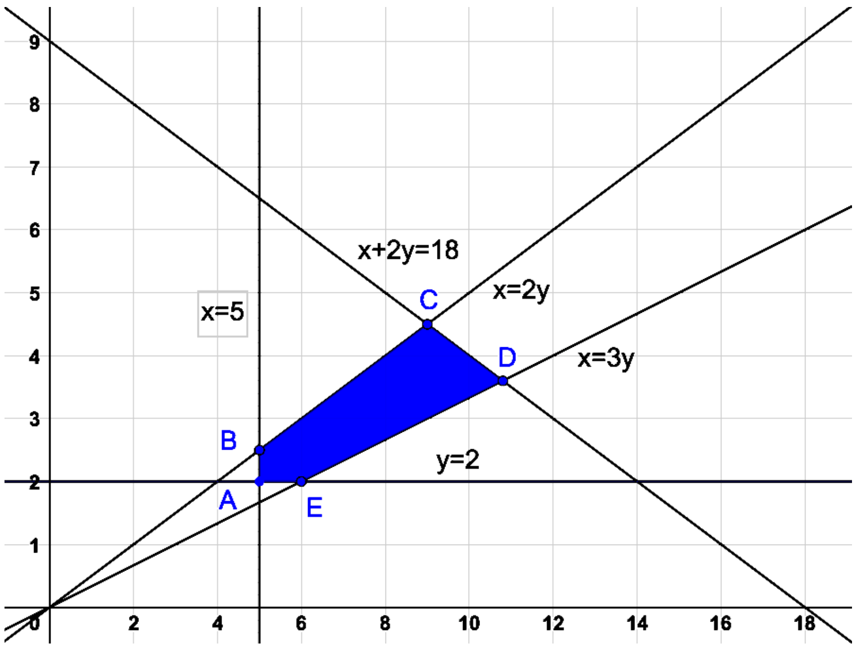
a)



Región Factible

$$\begin{cases} ① \ y \geq 2 & \rightarrow \quad (0,2) \\ ② \ x \geq 5 & \rightarrow \quad (5,0) \\ ③ \ x \geq 2y & \rightarrow \quad (0,0) \quad \& \quad (2,1) \\ ④ \ x \leq 3y & \rightarrow \quad (0,0) \quad \& \quad (3,1) \\ ⑤ \ x+2y \leq 18 & \rightarrow \quad (18,0) \quad \& \quad (0,9) \\ x, \ y \geq 0 & \end{cases}$$

La ec. ⑤ sale de: $1000y + 500x \leq 9000 \implies x + 2y \leq 18$



b) Si queremos la solución con mayor ancho ($y_{\text{máx}}$) hemos de coger el punto de la frontera de la región factible con mayor ordenada. En este caso $C(9, 4.5)$, cuyo coste es de 9000 euros pues se encuentra sobre la recta $⑤ \equiv x + 2y = 18$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese A^{-1}.

b) (1 punto) Calcúlese B^{-1}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos la matriz A^{-1} por el método de los adjuntos.

$$|A| = 18 + 64 + 60 - (40 + 96 + 18) = -12 \quad \& \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -18 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

b) Si llamamos $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot C \implies B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1}A}_{I} = \frac{1}{2} \cdot CA \implies B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot CA$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) *(1 punto) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando* x *tiende a infinito y a menos infinito.*

b) *(1 punto) Detemínense los valores de* x *en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Corte con OY: $x = 0 \implies y = 3 \implies (0,3)$
Corte con OX: $y = 0 \implies x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \xrightarrow{Ruffini} x = \{-3, 1\} \implies (-3,0) \quad \& \quad (1,0)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = +\infty$

b) $m_r = f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4/3 \end{cases}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A *y* B *dos sucesos con:*

$$P(A) = 0.3 \quad \& \quad P(B \mid A) = 0.4 \quad \& \quad P(B \mid \overline{A}) = 0.6$$

. *Calcúlese:*

a) *(1 punto)* $P(A \mid B)$

b) *(1 punto)* $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario de suceso* S

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $P(B \mid A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \implies P(B\cap A) = P(A)\cdot P(B \mid A) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$

$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A\cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{P(B) - 0.12}{1 - 0.3} = 0.6 \implies$
$P(B) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.12 = 0.54$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B\cap A)}{P(B)} = \dfrac{0.12}{0.54} = 0.222$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$

$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(B)} = \frac{1 - (0.3 + 0.54 - 0.12)}{1 - 0.54} = 0.609$$

———— ∘ ————

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) *(1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0.22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.*

b) *(1 punto) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 habían faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $p = 0.22 \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.99 \quad \& \quad \varepsilon < 0.04$

$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.995 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{pq}{n}} < 0.04 \implies n > \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sqrt{pq}}{0.04}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \dfrac{\sqrt{0.22 \cdot 0.78}}{0.04}\right)^2 = 711.13$

Luego $\boxed{n = 712 \text{ trabajadores}}$

b) $n = 1000 \quad \& \quad p = \dfrac{250}{1000} = 0.25 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\sqrt{\dfrac{0.25 \cdot 0.75}{1000}} = 0.0268$

$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (0.2231; 0.2768)}$

———— ∘ ————