MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2020
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2020
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ *con* $a \in \mathbb{R}$.

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad*
$A^2 - 5A = -I$, *donde I es la matriz identidad.*

b) *(1 punto) Calcule A^{-1} para $a = -1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4+5a^2 & 25a \\ 5a & 9+5a^2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 4+5a^2 & 25a \\ 5a & 9+5a^2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+5a^2 & 0 \\ 0 & -6+5a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = -I \implies \begin{pmatrix} -6+5a^2 & 0 \\ 0 & -6+5a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies -6+5a^2 = -1 \implies \boxed{a = \pm 1}$$

b) Para $a = -1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \implies |A| = 1 \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) (1 punto) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

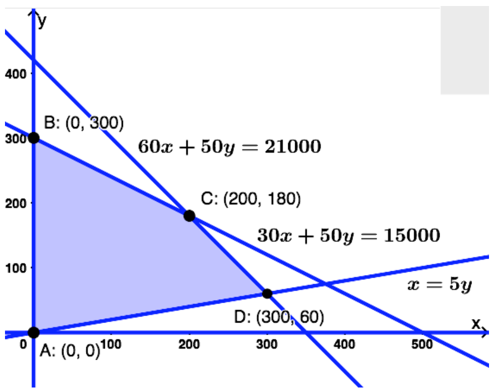
	Sustrato A	Sustrato B	Restricción
Tierra vegetal (kg/m^3)	60	50	$<$ 21000
Horas de trabajo (h/m^3)	30	50	$<$ 15000
Beneficio (£$/m^3$)	50	60	

- `Incógnitas` Llamamos x e y a los m^3 de cada tipo de sustrato.
- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para representarlas

$$\begin{cases} ① \; 60x + 50y \leq 21000 & \to (0, 4420) \quad \& \quad (3683, 0) \\ ② \; 30x + 50y \leq 15000 & \to (0, 300) \quad \& \quad (500, 0) \\ ③ \; x \leq 5y & \to (0, 0) \quad \& \quad (500, 100) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` (Coste en €) $\qquad f(x, y) = 50x + 60y$
- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.
- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice.

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	300	18000
C	200	180	20800
D	300	60	18600



El *coste máximo* es de 20800 €, elaborando 200 m^3 del sustrato tipo A y 180 m^3 del B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & si\ x < 1 \\ 2m + \ln x & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) (1 punto) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a)

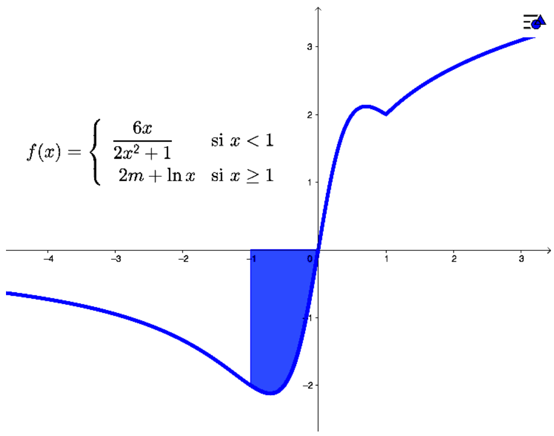
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x}{2x^2+1} = 2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2m + \ln x) = 2m \\ \bullet f(1) = 2m + \cancelto{0}{\ln 1} = 2m \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ 2 = 2m \implies \boxed{m = 1} \end{array}$$

Para $x < 1$, $f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1} \implies f'(x) = \dfrac{6\cdot(2x^2+1) - 6x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX entre las rectas $x = -1$ y $x = 0$ (en la rama de $f_1(x)$).

$$f_1(x) = \frac{6x}{2x^2+1} = 0 \implies x = 0$$

Para el cálculo del área definimos el intervalo $A_1 = (-1, 0)$.



$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x^2+1 \\ du = 4x\,dx \implies \dfrac{1}{4x}\,du = dx \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{6\cancel{x}}{u} \cdot \frac{1}{4\cancel{x}}\,du = \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{2} \ln u \Big]_3^1 = \frac{3}{2} \ln\left(2x^2+1\right)\Big]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\cancelto{0}{\ln 1} - \ln 3\right) = -\frac{3}{2}\ln 3 = -\ln\left(3\sqrt{3}\right) \simeq -1.648$$

$$Area = |A_1| = \ln\left(3\sqrt{3}\right) \simeq 1.648\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \mid B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ *y* $P(A) = \dfrac{2}{3}$*. Calcule:*

a) (1 punto) $P(A \cup \overline{B})$.

b) (1 punto) $P\Big(\overline{A} \cap B\Big) \cup (\overline{B} \cap A)$.

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

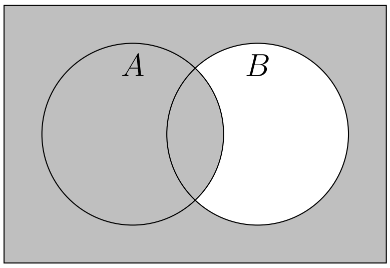
Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{4} \quad \& \quad P(A) = \frac{2}{3} \quad \& \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{4}$

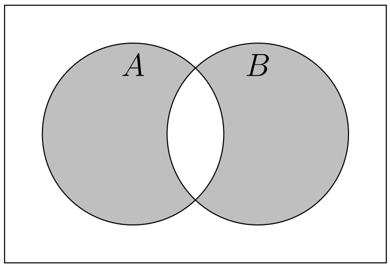
$$\Longrightarrow \; P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$



$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= 1 - P(\overline{A} \cap B) \\ &= 1 - \Big[P(B) - P(A \cap B)\Big] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\Big(\overline{A} \cap B\Big) \cup (\overline{B} \cap A) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{19}{24} - \frac{1}{24} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $\mu = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0.9940$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 20 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} < 20 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 60) \xrightarrow{n=100} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6\right)$

$$P(\overline{X} \leq 220) = P(Z < \frac{220 - \mu}{6}) = 0.9940 \xrightarrow{Tabla} 2.51 = \frac{220 - \mu}{6} \implies \boxed{\mu = 204.94}$$

Septiembre 2020
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \implies a = \{-1, 4\}$$

- Si $a \neq \{-1, 4\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-1, 4\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 5F_3 - 9F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 3 \cdot (-1/2) = 1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y - (-3/2) = -1 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 4z = -6 \ \Rightarrow \qquad\quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & a+4 & 2-a & a-6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ (a+4) \cdot F_2 + a \cdot F_3 \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & a & 2 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+3a+4 & a^2-5a+4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a^2 + 3a + 4 = 0 \\ \boxed{a = \{-1, 4\}} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 4\} \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPAT. DETERMINADO
- Si $a = -1 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE
- Si $a = 4 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 1$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -z - 4 \cdot (-1/2) + 3 \cdot (-1/2) = 2 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow -3y - 1/2 = 1 \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x = -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} z = -3/2 \\ y = -1/2 \\ x = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

a) *(1 punto) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

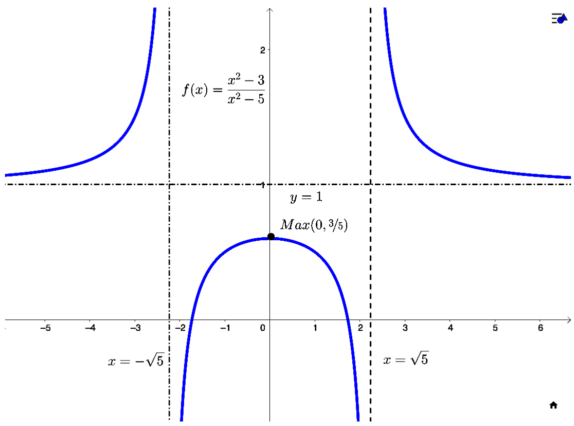
a) $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{ax^2 - 3}{x^2 - 5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = a = -1 \implies \boxed{a = -1}$

b) Para $a = 1 \implies f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$ & $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{5}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 5) - 2x \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$\left(-\infty, -\sqrt{5}\right)$	$\left(-\sqrt{5}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{5}\right)$	$\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, 0\right)$ y *decreciente* en $\left(0, \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 3/5)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

a) (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcule

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

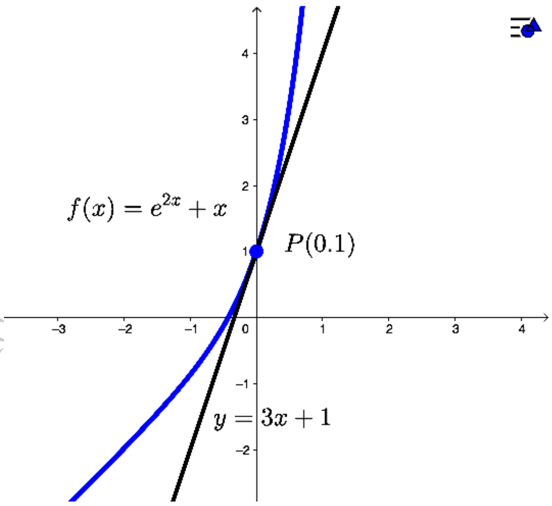
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a)
- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow P(0.1)$
- $f'(x) = 2e^{2x} + 1$
- $m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

  $r \equiv y - 1 = 3 \cdot (x - 0)$

  $\boxed{r \equiv y = 3x + 1}$



b) $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (e^{2x} + x)\, dx = \int_0^1 e^{2x}\, dx + \int_0^1 x\, dx$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2\, dx \Rightarrow \dfrac{1}{2}\, du = dx \end{array} \right\} = \int_0^1 e^u \cdot \frac{1}{2}\, du + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left.\frac{1}{2} e^u\right]_0^2 + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left.\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left.\frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [(e^2 + 1) - (1 + 0)] = \frac{1}{2} \cdot e^2 \simeq 3.695$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un instituto se decide que los alumnos solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0.7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0.2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) (1 punto) Sea el examen de un alumno.

b) (1 punto) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

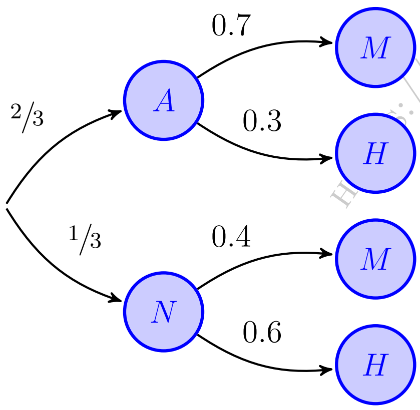
Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}
A &\equiv \text{“El examen está escrito en azul”}\\
N &\equiv \text{“El examen está escrito en Negro”}\\
M &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumna”}\\
H &\equiv \text{“El examen lo ha realizado una alumno”}
\end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \& \quad P(M \mid A) = 0.7 \quad \& \quad P(N \cap H) = 0.2$$

$$P(N \cap H) = P(N) \cdot P(H \mid N) = \frac{1}{3} \cdot P(H \mid N) = 0.2 \implies P(H \mid N) = 0.6$$



a) $$\begin{aligned}
P(H) &= P\big((A \cap H) \cup (N \cap H)\big)\\
&= P(A \cap H) + P(N \cap H)\\
&= P(A) \cdot P(H \mid A) + P(N) \cdot P(H \mid N)\\
&= \frac{2}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.6 = 0.4
\end{aligned}$$

b) $$P(H \mid N) = \frac{P(N \cap H)}{P(N)} = \frac{0.2}{1/3} = 0.6$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximare por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) *(1 punto) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26.9, 37.1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98.92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.*

b) *(1 punto) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 36 minutos de media para completar el recorrido.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad I.C.(26.9, 37.1) \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9892$

$$1-\alpha = 0.9892 \Rightarrow \alpha = 0.0108 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0.0054 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.9946 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.55$$

$$\overline{x} = \frac{26.9 + 37.1}{2} = 32$$

$$E = \frac{37.1 - 26.9}{2} = 5.1$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.55 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5.1 \Longrightarrow n > \left(2.55 \cdot \frac{10}{5.1}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{n = 25}$$

b) $X : \mathcal{N}(30, 10) \xrightarrow{n=160} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.5\right)$

$$P(25 \leq \overline{X} \leq 35) = P(\frac{25-30}{2.5} < Z < \frac{35-30}{2.5}) = P(-2 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \leq 2) - \left[1 - P(Z \leq 2)\right] = 2P(Z \leq 2) - 1 \xrightarrow{Tabla}$$

$$2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$