MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2019
- Ordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Junio 2019 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+(a+2)z &= 1 \\ x+y+az &= 0 \\ (a-1)x+2z &= a+1 \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 3a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{0, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $\xRightarrow{\textit{Rouche}}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

$$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}} \text{Sistema Incompatible } (\nexists \text{ solución})$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 2 \cdot 2 = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 4 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se consideran las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 5x + 20 \quad \& \quad g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

a) (1 punto) Hállese el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente -3 y determínese la ecuación de esta recta tangente.

b) (1 punto) Calcúlese el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de g, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje OX sea igual a $2\ u^2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia.

$$f'(x) = x^3 + 5$$

$$m_r = f'(x_0) \implies -3 = x_0^3 + 5$$

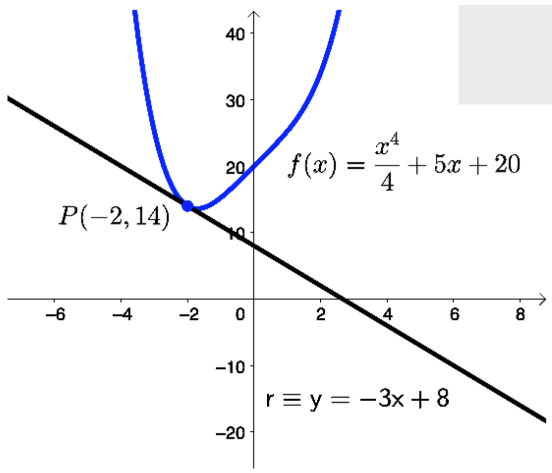
$$\implies x_0 = -2 \implies y_0 = f(-2) = 14$$

$$\boxed{P(-2, 14)}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 14 = -3 \cdot (x + 2)$$

$$\boxed{r \equiv y = -3x + 8}$$



b) Hallamos los puntos de corte de la función $g(x)$ y el eje OX.

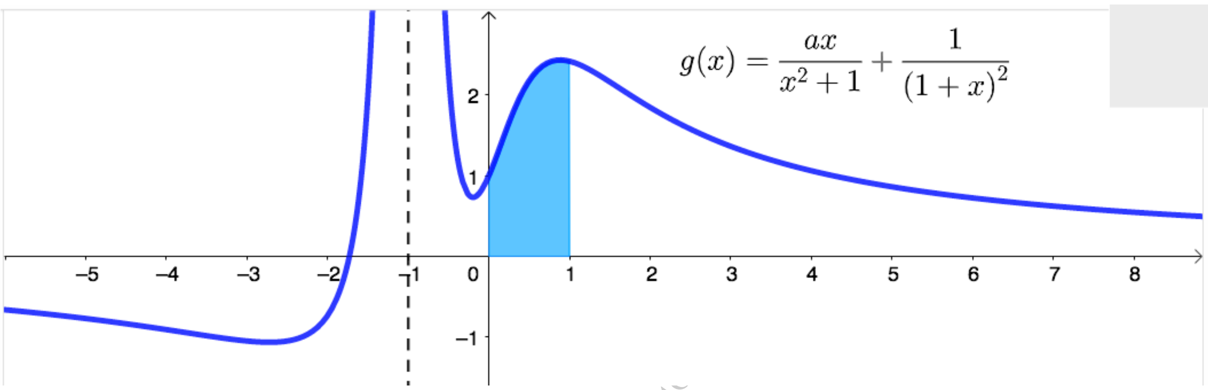
$$g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2} = 0 \implies \nexists \text{ Pto. corte en } (0, 1)$$

Esto es debido a que $\dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ y para que la suma sea cero $\dfrac{ax}{x^2+1} < 0$.

Como $\begin{cases} a > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \implies x < 0$. Por lo que en el intervalo $(0, 1)$ no habrá puntos

de corte.
Tenemos por tanto un único recinto de intetración $A_1 = (0.1)$.

$$A_1 = \int_0^1 g(x\,dx) = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = a \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$
$$+ \int_0^1 (1+x)^{-2}\,dx = \frac{a}{2}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{1+x}\Big]_0^1 = \left(\frac{a}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a}{2}\cancel{\ln 1}^{\,0} - 1\right)$$
$$= \frac{a}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{a\ln 2 + 1}{2}$$
$$Area = |A_1| = \left|\frac{a\ln 2+1}{2}\right| = \frac{a\ln 2+1}{2} = 2 \implies \boxed{a = \frac{3}{\ln 2} \simeq 4.33}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Dada la función real de variable real:*
>
> $$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$
>
> *a) (1 punto) Determínese el dominio y las asíntotas de $f(x)$.*
>
> *b) (1 punto) Obténganse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)*

HTTPS://APRENDECONMIG

Solución.

a) Las raíces del denominador son: $x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = \{1, 3\}$ por lo que el dominio de la función será: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador.

  - $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$
  - $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$

- `A.Horizontal` $y = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$

b) Hallamos los puntos singulares y los representamos en la recta real junto con las asíntotas verticales:

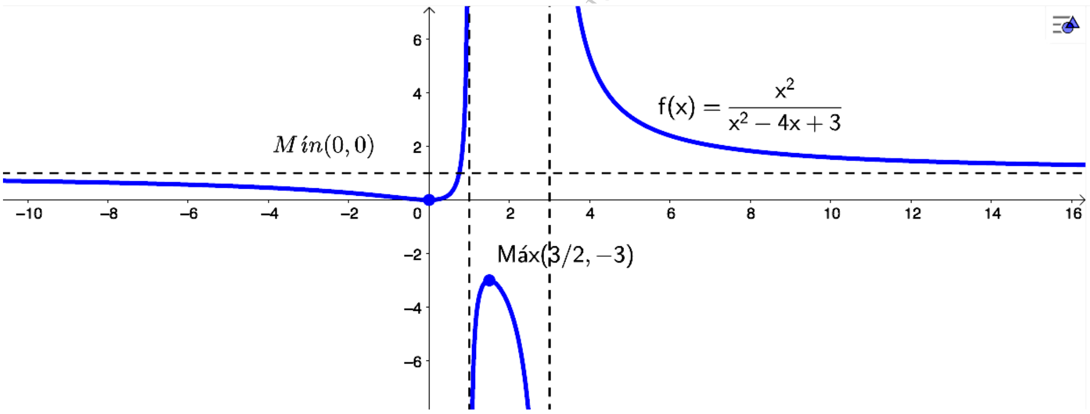
$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 4x + 3) - x^2 \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x^2 + 6x - \cancel{2x^3} + 4x^2}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x \cdot (x - 3/2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ x - 3/2 = 0 \Longrightarrow x = 3/2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	(0.1)	$(1, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	$+$	-	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

GOMEZON.COM

La función $f(x)$ es *creciente* en $(0.1) \cup (1, 3/2)$ y *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(3/2, -3)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0.6*. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Esté elaborado con masa fresca.

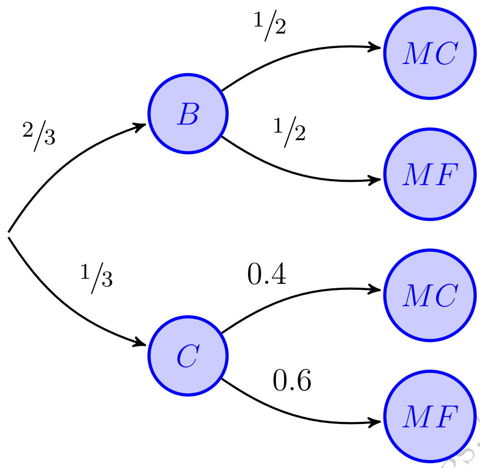
b) (1 punto) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$B \equiv$ "El pan es blanco" $\qquad C \equiv$ "El pan es de cereales"

$MC \equiv$ "El pan es de masa congelada" $\qquad MF \equiv$ "El pan es de masa fresca"



a) $$\begin{aligned} P(MF) &= P\big((B\cap MF)\cup(C\cap MF)\big) \\ &= P(B\cap MF)+P(C\cap MF) \\ &= P(B)\cdot P(MF \mid B)+P(C)\cdot P(MF\mid C) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0.6 = 0.53 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(C \mid MC) &= \frac{P(C\cap MC)}{P(MC)} \\ &= \frac{P(C)\cdot P(MC\mid C)}{1-P(MF)} \\ &= \frac{1/3\cdot 0.4}{1-0.53} = 0.286 \end{aligned}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0.1587$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 5 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 5 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{10}{5}\right)^2 = 15.36 \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(40, 5) \xrightarrow{n=?} \overline{X} : \mathcal{N}\left(40, \dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.1587 \implies P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.8413$$

$$\xrightarrow{Tabla} \frac{\sqrt{n}}{5} = 1.00 \implies \sqrt{n} = 5 \implies \boxed{n = 25}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Junio 2019 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$$C \cdot A = B \cdot C \quad y \quad |C| = 2$$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C.

b) (1 punto) Calcúlese, para los valores $a = b = c = 1$, $C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100}.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Solución.

a) $C \cdot A = B \cdot C \quad \& \quad |C| = 2$

$$C \cdot A = B \cdot C \implies \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 6+2a = 0 \implies \boxed{a = -3} \\ -3b+2c = -b \implies b = c \\ -3b+2c = -c \implies b = c \end{cases}$$

$$|C| = 2 \implies -2c - ab = 2 \xRightarrow[a=-3]{b=c} -2b + 3b = 2 \implies \boxed{b = c = 2}$$

b) Para $a = b = c = 1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = -3 \implies C^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} \cdot B \cdot C = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$$

$$B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^n = \begin{cases} -B & \text{si } n \text{ es par} \\ B & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \implies B^{100} = -B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta CL y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientas que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

a) (1 punto) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) (1 punto) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Kg de cloro de disolución lenta (CL)"
  $y \equiv$ "Kg de cloro estabilizado (CE)"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos para su representación

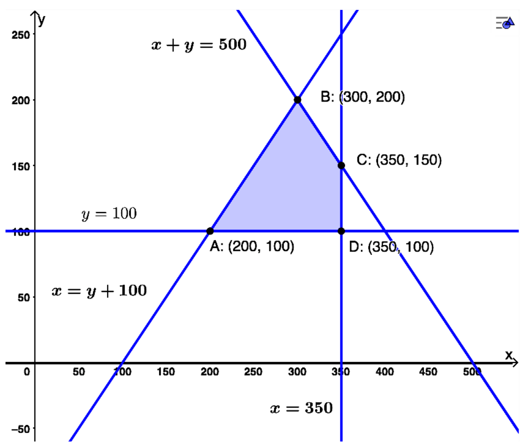
$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 500 & \rightarrow (0,500) \quad \& \quad (500,0) \\ ② \; x \geq y + 100 & \rightarrow (0,100) \quad \& \quad (300,400) \\ ③ \; x \leq 350 & \rightarrow (350,0) \\ ④ \; y \geq 100 & \rightarrow (0,100) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo:` Coste del cloro. $f(x,y) = 30x + 60y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	100	12000
B	300	200	21000
C	350	150	19500
D	350	100	16500



Por tanto el *coste mínimo* es de 12000 euros y se produce con un consumo de 200 kg de cloro de disolució lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga tangente horizontal en $x = 3$.

b) (1 punto) Hállense las asíntotas de $f(x)$ para $a = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $m_r = f'(x_0) = f'(3) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - a) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - a)^2} = \frac{x^4 - 3ax^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3a)}{(x^2 - a)^2}$$

$$m_r = f'(3) = 0 \implies \frac{9 \cdot (9 - 3a)}{(9 - a)^2} = 0 \implies 9 - 3a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

b) Si $a = 4 \implies f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Hallamos las asíntotas:

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

  - $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

  - $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A.Horizontal` $y = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists$ *A.H.*

- `A.Oblicua` $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - (x^3 - 4x)}{x^2 - 4}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x}{x^2 - 4}\right) = 0$$

Luego $\exists$ A.O. en $y = x$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \mid B) = \frac{1}{4} \quad \& \quad P(B \mid A) = \frac{1}{6} \quad \& \quad P(A) = \frac{2}{3}$$

Calcúlese:

a) (1 punto) $P\left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)$.

b) (1 punto) $P\left(\overline{A} \cap B\right)$

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Antes de empezar vamos a ver qué podemos obtener de las probabilidades condicionadas que nos dan

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{2/3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/9}{P(B)} = \frac{1}{4} \Longrightarrow P(B) = \frac{4}{9}$$

Pasamos ahora a hallar lo que nos piden:

$P\left(\overline{B} \cup \overline{A}\right) = P\left(\overline{B \cap A}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) *Suponiendo $\mu = 3000$ €, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 € sea 0.20.*

b) *Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 € y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 €.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(3000, \sigma) \xrightarrow{n=49} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} > 3125) = P\left(Z > \frac{3125 - 3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z > \frac{875}{\sigma}\right) = 1 - P(Z < \frac{875}{\sigma}) = 0.20$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{875}{\sigma}\right) = 0.80 \xrightarrow{Tabla} \frac{875}{\sigma} = 0.845 \Longrightarrow \boxed{\sigma = 1035.5}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3300$

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow \alpha/2 = 0.025 \Longrightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1000}{\sqrt{100}} = 196$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \Longrightarrow \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (3104, 3496)}$$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM