

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS



EVAU JUNIO 2018

- Ordinario -

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Junio 2018

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Compruébese que B es la matriz inversa de A .

b) (1 punto) Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) B es matriz inversa de $A \iff B \cdot A = A \cdot B = I$

Es importante la comprobación de los dos productos pues el hecho de que el producto de matrices no sea conmutativo así nos lo exige.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B \implies \underbrace{B \cdot A}_I \cdot X = B \cdot B \implies X = B^2$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, \quad 2x + y \leq 80, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

- a) (1 punto) Representétese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- b) (1 punto) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S , indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

- Función objetivo

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

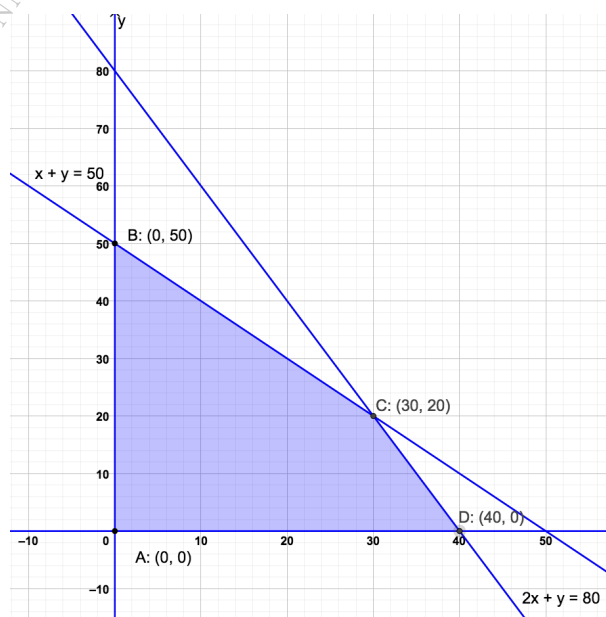
- Restricciones Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1} x + y \leq 50 & \rightarrow (0, 50) \quad \& \quad (50, 0) \\ \textcircled{2} 2x + y \leq 80 & \rightarrow (0, 80) \quad \& \quad (40, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- Región factible Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- Optimización de la función objetivo Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	50	200
C	30	20	230
D	40	0	200



Luego el máximo de la función es 230 que se produce en el punto $C(30, 20)$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2$$

$$\blacksquare f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \implies f(x) \text{ no es continua en } x = 2$$

$$\text{b) Cuando } x < 2, f(x) = \frac{x+2}{x-1} \implies f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
- b) (1 punto) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$T \equiv$ “El cliente busca billete de transporte”

$H \equiv$ “El cliente busca un hotel”

Del enunciado tenemos:

$$P(T) = 0.75 \quad \& \quad P(H) = 0.8 \quad \& \quad P(T \cap H) = 0.65$$

a) $P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0.75 + 0.8 - 0.65 = 0.9$

b) $P(T | H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \frac{0.65}{0.8} = 0.8125$

_____ o _____

Ejercicio 5 (2 puntos)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media $\mu = 4$ gramos y desviación típica $\sigma = 0.5$ gramos.

- a) (1 punto) *Determinése el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0.25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.*
- b) (1 punto) *Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, \bar{X} , pese más de 12.25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(4, 0.5) \xrightarrow{n} \bar{X} : \mathcal{N}(4, 0.5/\sqrt{n})$$

- a) Hallar el mínimo n de tal forma que $E \leq 0.25$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.25}\right)^2 = 15.36$$

y por tanto $n = 16$

- b) $X : \mathcal{N}(12, 0.5) \xrightarrow{n=25} \bar{X} : \mathcal{N}(12, 0.5/\sqrt{25}) = \mathcal{N}(12, 0.1)$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 12.25) &= P\left(Z > \frac{12.25 - 12}{0.1}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5) \\ &= 1 - 0.9938 = 0.0062 \end{aligned}$$

_____ o _____

Junio 2018

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a+1 \end{aligned} \right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Ponemos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

■ Si $a \neq 1$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A = 3 = \text{ran} A^* = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SIST. COMP. DET.}$

■ Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran} A < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A^* = 3$$

$$\text{ran} A = 2 \neq \text{ran} A^* = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + 3 \cdot (-3/2) + 12 &= 1 &\Rightarrow x &= -13/2 \\ \Rightarrow -8 \cdot (-3/2) - z &= 0 &\Rightarrow y &= -3/2 \\ \Rightarrow -2y &= 3 &\Rightarrow z &= 12 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

a) (1 punto) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determinénse sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) ■ $x + 1 = 0 \implies x = -1 \implies \text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

■ A.Horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists A.H.$

■ A.Oblicua Haciendo la división $\frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$ obtenemos la recta $y = x - 2$.

También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - (x^3 + 2x^2 + x)}{(x+1)^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -2$$

■ A. Vertical $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$

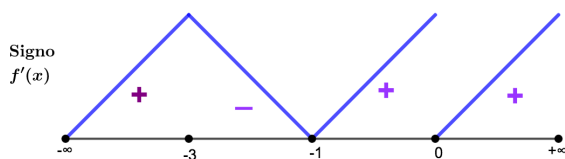
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \left[\frac{-1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \end{cases}$$

b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

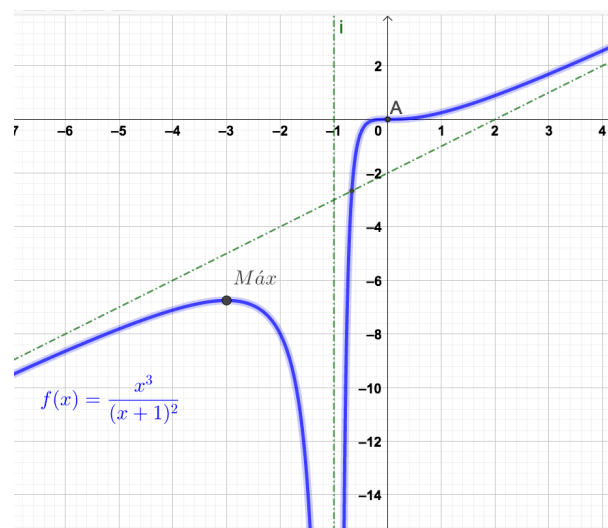
$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = \{-1, -3, 0\}$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x+3)}{(x+1)^4} = \frac{x^2 \cdot (x+3)}{(x+1)^3}$$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, -1)$ y tiene un *máximo* en $x = -3$.



Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

- (1 punto) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX .
- (1 punto) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

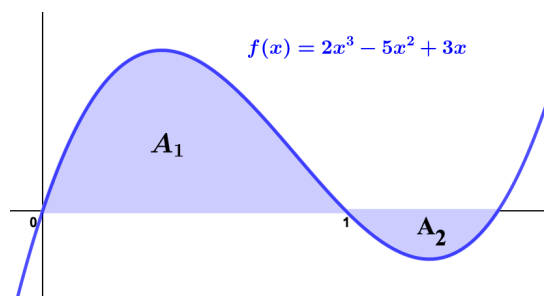
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

- Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX .

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} \Rightarrow x = \{1, 3/2\} \end{cases}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3/2$, planteamos el área de manera que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 3/2)$.



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right) - (0) \\ &= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A_2 = \int_1^{3/2} f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^{3/2} = \left(\frac{81}{32} - \frac{135}{24} + \frac{27}{8} \right) - \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{9}{32} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{96}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96} u^2$$

- b) El punto de tangencia es
 $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 0$

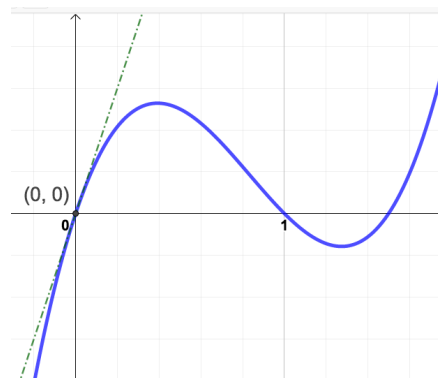
$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 0 = 3 \cdot (x - 0)$$

$$r \equiv y = 3x$$



Ejercicio 4 (2 puntos)

En una comunidad de vecinos en el 70% de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30% restante un nombre femenino. En dicha comunidad la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

- a) (1 punto) Una persona que trabaja.
- b) (1 punto) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

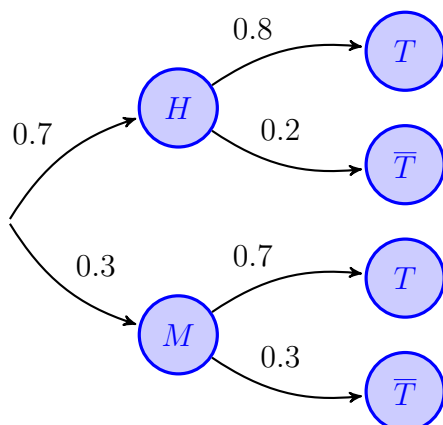
Solución.

Sean los sucesos:

$H \equiv$ "El primer nombre del buzón es masculino"

$M \equiv$ "El primer nombre del buzón es femenino"

$T \equiv$ "La persona trabaja"



$$\begin{aligned} \text{a) } P(T) &= P((H \cap T) \cup (M \cap T)) \\ &= P(H \cap T) + P(M \cap T) \\ &= P(H) \cdot P(T | H) + P(M) \cdot P(T | M) \\ &= 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.77 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(H | T) &= \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{P(H) \cdot P(T | H)}{P(T)} \\ &= \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.727 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 10$ descargas.

- a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99.5 descargas. Determinése un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) (1 punto) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra de 10 horas la media muestral, \bar{X} , esté entre 100 y 110 descargas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

- a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=40} \bar{X} = 99.5$
 $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$
 $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} = 3.1$
 $I.C._{95\%}(\mu) = (\bar{X} - E; \bar{X} + E) \Rightarrow I.C._{95\%}(\mu) = (96.4, 102.6)$
- b) $X : \mathcal{N}(100, 10) \xrightarrow{n=10} \bar{X} : \mathcal{N}(100, 10/\sqrt{10}) = \mathcal{N}(100, 3.16)$
 $P(100 < \bar{X} < 110) = P\left(\frac{100 - 100}{3.16} < Z < \frac{110 - 100}{3.16}\right) = P(0 < Z < 3.16)$
 $= P(Z < 3.16) - P(Z < 0) = 0.9992 - 0.5 = 0.4992$

_____ o _____