MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2018

- Ordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2018 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

donde m es un parámetro real.

a) *(1 punto) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Para $m = 0$ considérese la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X:*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \implies m = 3$. Luego $\exists\, A^{-1},\ \forall m \in \mathbb{R} - \{3\}$

b) Para $m = 0 \implies A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 6 - 2 \cdot 0 = 6 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ -1 & 3/2 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 6\,; \quad 4x + y \leq 12\,; \quad x \geq 0\,; \quad y \geq 0$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = \dfrac{8x + 3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

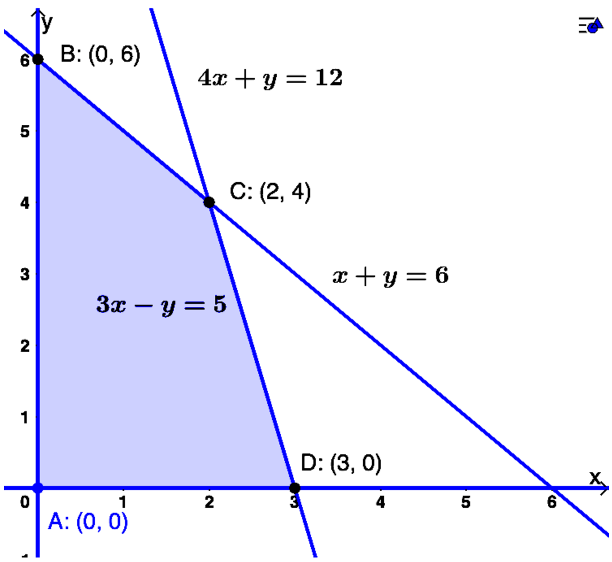
- `Restricciones` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 6 & \rightarrow (0,6) \quad \& \quad (6,0) \\ ② \; 4x + y \leq 12 & \rightarrow (0,12) \quad \& \quad (3,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = \frac{8x + 3y}{5}$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	0	0
B	0	6	$^{18}/_{5}$
C	2	4	$^{28}/_{5}$
D	3	0	$^{24}/_{5}$

Por tanto el *máximo* es de $^{28}/_{5}$ y se produce en el punto $C(2, 4)$, mientras que el *mínimo* es 0 y se alcanza en el punto $A(0, 0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

b) *(1 punto) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f'(x)$, siendo f' la función derivada de f.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- $x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$
- $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$
- $m_r = f'(x_0) = f'(0) = -1$
- $r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0) \implies y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \implies \boxed{r \equiv y = -x + 1}$

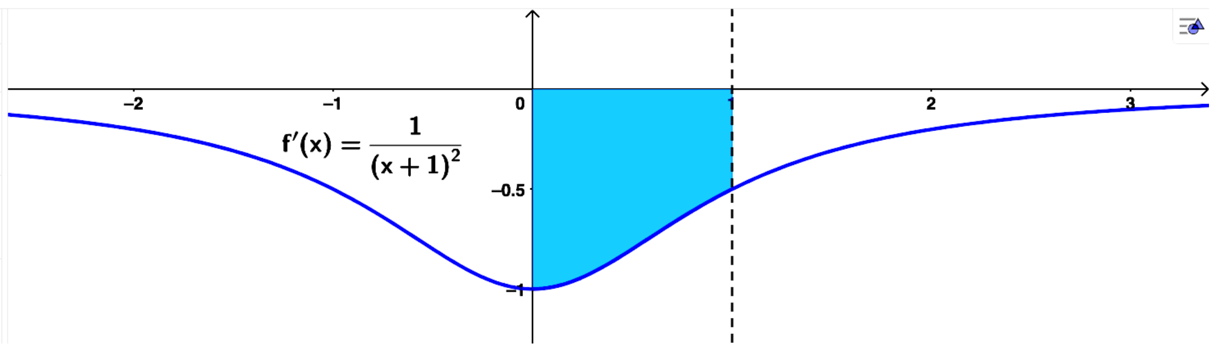
b) Hallamos los puntos de corte de $f'(x)$ con el eje OX.

$$-\frac{1}{(x+1)^2} = 0 \implies 1 = 0 \implies \nexists \text{ Pto. corte } OX$$

Lo que define un único recinto de integración delimitado por las rectas verticales: $A_1 = (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$Area = |A_1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ u^2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se toma un coche al azar de la Comunidad de Madrid. Se sabe que la probabilidad de que tenga motor diésel es 0.4*. La probabilidad de que tenga mas de* 8 *años es* 0.5*. Finalmente se sabe que la probabilidad de que tenga más de ocho años o motor diésel es* 0.55*. Calcúlese la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Tenga motor diésel sabiendo que tiene más de ocho años.

b) (1 punto) No tenga motor diésel ni tenga más de ocho años.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$D \equiv \text{"El coche tiene motor diésel"}$$
$$O \equiv \text{"El coche tiene más de ocho años"}$$

Del enunciado sabemos las siguientes probabilidades:

$$P(D) = 0.4 \quad \& \quad P(O) = 0.5 \quad \& \quad P(D \cup O) = 0.55$$

a) $P(D \mid O) = \dfrac{P(D \cap O)}{P(O)} = \dfrac{P(D) + P(O) - P(D \cup O)}{P(O)} = \dfrac{0.4 + 0.5 - 0.55}{0.5} = 0.70$

b) $P(\overline{D} \cap \overline{O}) = P\left(\overline{D \cup O}\right) = 1 - P(D \cup O) = 1 - 0.55 = 0.45$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ h y desviación típica $\sigma = 0.25$ h.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{x} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Supóngase que $\mu = 2$ h. calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1.85 y 2.15 horas.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.25) \xrightarrow{n=15} \overline{x} = 2 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.25}{\sqrt{15}} = 0.127$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (1.873; 2.127)}$$

b) $X : \mathcal{N}(2, 0.25) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(2, \frac{0.25}{\sqrt{20}} = 0.056\right)$

$$\begin{aligned} P(1.85 \leq \overline{X} \leq 2.15) &= P\left(\frac{1.85-2}{0.056} \leq Z \leq \frac{2.15-2}{0.056}\right) = P(-2.68 \leq Z \leq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - P(Z \leq -2.68) = P(Z \leq 2.68) - P(Z \geq 2.68) \\ &= P(Z \leq 2.68) - [1 - P(Z \leq 2.68)] = 2 \cdot P(Z \leq 2.68) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9963 - 1 = 0.9926 \end{aligned}$$

Junio 2018 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-y+az=-1 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 3a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como se trata de un S.C.I. solo tenemos que resolver las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lrl} \Rightarrow & 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2a-1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_2 + F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2a = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{lrl} \Rightarrow & 2x + \frac{3-\lambda}{3} + \lambda = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & 3y + \lambda = 3 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{3-\lambda}{3} \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínese si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Calcúlense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si las tuviese.

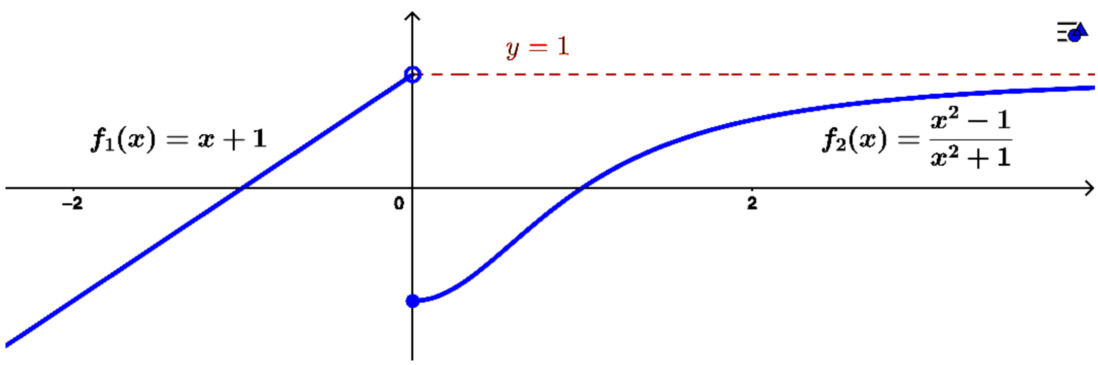
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = x + 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -1$
  - $f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

  Como los límites laterales son distintos la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b)
- `A. Horizontal`
  - $y = \lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)$ Como se trata de una recta no hay asíntotas de ningún tipo en esta rama
  - $y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1 \implies$ A.H. en $y = 1 \implies \nexists$ A.O.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$$

a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) (1 punto) Calcúlense sus máximos y mínimos locales si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Derivamos la función y calculamos sus puntos singulares:

$$f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 0 \implies x = \{-3, -2\}$$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, -2)$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $(-3, -27)$ y un *mínimo relativo* en $(-2 - 28)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Entre los músicos que ensayan en un determinado local de Madrid, un 30 % sabe tocar la batería, un 80 % sabe tocar la guitarra y un 20 % sabe tocar tanto la batería como la guitarra. Se elige uno de esos músicos al azar. Calcúlese la probabilidad de que:*
>
> *a) (1 punto) No sepa tocar la batería si se conoce que sabe tocar la guitarra.*
>
> *b) (1 punto) Conocido que no sabe tocar la guitarra, no sepa tocar la batería.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$B \equiv \text{"El músico sabe tocar la batería"}$$
$$G \equiv \text{"El músico sabe tocar la guitarra"}$$

Del enunciado sabemos las siguientes probabilidades:

$$P(B) = 0.3 \quad \& \quad P(G) = 0.8 \quad \& \quad P(B \cap G) = 0.2$$

a) $P(\overline{B} \mid G) = \dfrac{P(\overline{B} \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G) - P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0.8 - 0.2}{0.8} = 0.75$

b) $P(\overline{B} \mid \overline{G}) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap \overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{B \cup G}\right)}{P(\overline{G})} = \dfrac{1 - P(B \cup G)}{1 - P(G)}$

$$= \frac{1 - [P(B) + P(G) - P(B \cap G)]}{1 - P(G)} = \frac{1 - (0.3 + 0.8 - 0.2)}{1 - 0.8} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0.2$ kg.

a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) (1 punto) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1.5$ kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.2) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad E < 0.05 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} < 0.05 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{0.2}{0.05}\right)^2 = 61.46 \implies \boxed{n = 62}$$

b) $X : \mathcal{N}(1.5, 0.2) \xrightarrow{n=20} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1.5, \frac{0.2}{\sqrt{20}} = 0.045\right)$

Si la suma de los pesos de 20 ejemplares es de 32 kg, quiere decir que la media será $\overline{x} = \frac{32}{20} = 1.6$ kg

$$P(\overline{X} > 1.6) = P\left(Z > \frac{1.6 - 1.5}{0.045}\right) = P(Z > 2.22) = 1 - P(Z < 2.22)$$
$$= 1 - 0.9868 = 0.0132$$