# MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JULIO 2018
## - Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Julio 2018

# Opción A

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Considérense las matrices* $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

a) *(1 punto) Calcúlese* $\left[\left(A\cdot A^{\top}\right)^2-2A\cdot A^{\top}\right]^{11}$

b) *(1 punto) Determínense el número de filas y columnas de la matriz* $X$ *que verifica que* $X\cdot A^{\top}=B^{\top}$*. Justifíquese si* $A^{\top}$ *es una matriz invertible y calcule la matriz* $X$*.*

Nota: $M^{\top}$ *denota la matriz traspuesta de la matriz* $M$*.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)*

**Solución.**

a) $A\cdot A^{\top}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$\left(A\cdot A^{\top}\right)^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\left(A\cdot A^{\top}\right)^2-2A\cdot A^{\top}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[\left(A\cdot A^{\top}\right)^2-2A\cdot A^{\top}\right]^{11}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{11}&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

b) $\underbrace{X}_{1\times 2}\cdot\underbrace{A^{\top}}_{2\times 3}=\underbrace{B^{\top}}_{1\times 3}\implies X\in\mathcal{M}_{1\times 2}$

La matriz $A^{\top}$ no es invertible porque no es cuadrada.

$$X\cdot A^{\top}=B^{\top}\implies\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}$$
$$\implies\begin{pmatrix}y&x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}\implies X=\begin{pmatrix}3&2\end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Considérese la región del plano $S$ definida por:*

$$S = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 4;\;\; x + 2y \leq 12;\;\; x \leq 4;\;\; -x + 2y \leq 12\right\}$$

*a) (1 punto) Represéntese gráficamente la región $S$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

*b) (1 punto) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en $S$, indicando el valor de $f$ en dichos puntos.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)*

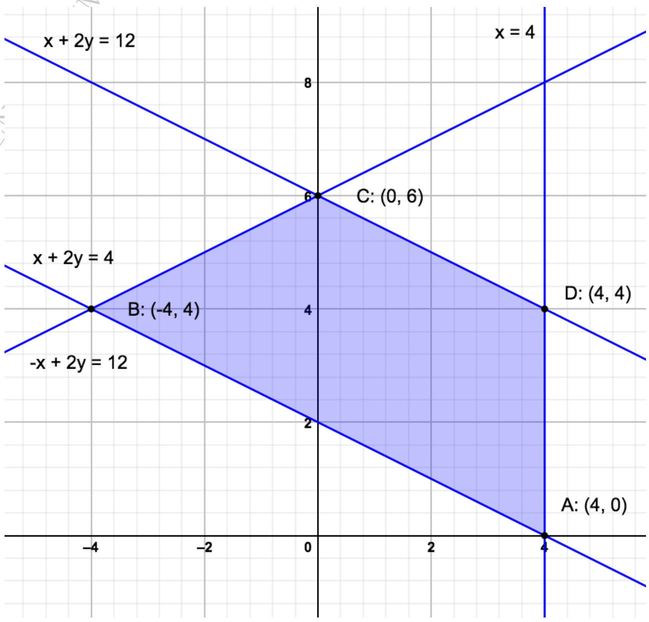
**Solución.**

- `Función objetivo:` $f(x, y) = 3x - y$
- `Región S:` Escribimos restricciones puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; x + 2y \geq 4 & \to (0, 2) \quad \& \quad (4, 0) \\ ② \; x + 2y \leq 12 & \to (0.6) \quad \& \quad (12, 0) \\ ③ \; x \leq 4 & \to (4, 0) \\ ④ \; -x + 2y \leq 12 & \to (0, 6) \quad \& \quad (-12, 0) \end{cases}$$

- `Región factible:` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma
- `Optimización de la fución objetivo:` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| A | 4 | 0 | 12 |
| B | $-4$ | 4 | $-16$ |
| C | 0 | 6 | $-6$ |
| D | 4 | 4 | 8 |




Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(4, 0)$ y vale 12, mientras que el *mínimo* se produce en $B(-4, 4)$ y vale $-16$.

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Considérese la función real de variable real:*

$$f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$$

.

a) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$.*

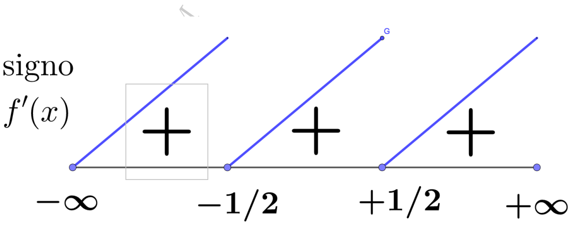
b) *(1 punto) Estúdiense las asíntotas de $f$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)*

**Solución.**

a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

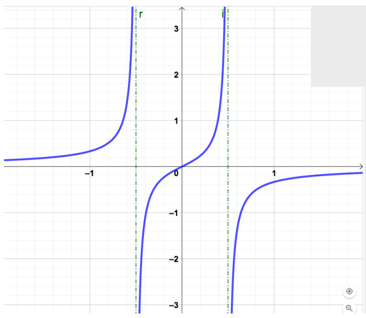
$$f'(x) = \frac{1-4x^2 - x\cdot(-8x)}{(1-4x^2)^2}$$
$$= \frac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 4x^2+1 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$




La función $f(x)$ es *Creciente* en $(-\infty, -1/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

b)
- `A.Horizontal` $\quad y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies y = 0$
- `A.Oblícua` $\quad \nexists$ A.O.
- `A. Vertical` $\quad f(x)$ tiene una asíntota vertical en $1-4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/2$

$$\lim_{x\to -1/2} f(x) = \left[\frac{-1/2}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to -1/2^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to -1/2^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1/2} f(x) = \left[\frac{1/2}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 1/2^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 1/2^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

## Ejercicio 4 (2 *puntos*)

*Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.*

a) *(1 punto) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.*

b) *(1 punto) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)*

**Solución.**

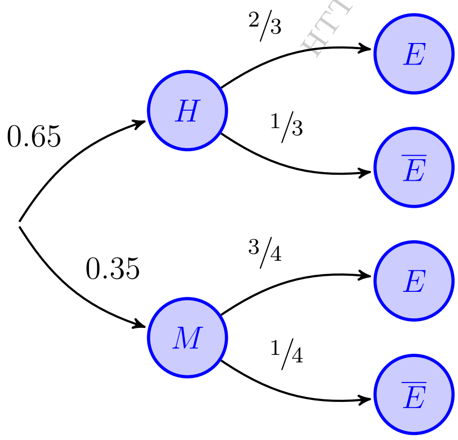
a) Denominamos los sucesos:

$$He \equiv \text{“El hombre elegido ha entrenado”}$$
$$Me \equiv \text{“La mujer elegida ha entrenado”}$$

$$P(He \cup Me) = P(He) + P(Me) - P(He \cap Me) = P(He) + P(Me) - P(He) \cdot P(Me)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$$

b) Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{“La persona elegida es hombre”}$$
$$M \equiv \text{“La persona elegida es mujer”}$$
$$E \equiv \text{La persona ha entrenado}$$




$$P(E) = P\big((H \cap E) \cup (M \cap E)\big)$$
$$= P(H \cap E) + P(M \cap E)$$
$$= P(H) \cdot P(E \mid H) + P(M) \cdot P(E \mid M)$$
$$= 0.65 \cdot \frac{2}{3} + 0.35 \cdot \frac{3}{4} = 0.6958$$

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H) \cdot P(E \mid H)}{P(E)}$$
$$= \frac{0.65 \cdot {}^{2}\!/_{3}}{0.6958} = 0.6227$$

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

*La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.*

*a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para $\mu$ sea a lo sumo de 23550 km.*

*b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción A)*

**Solución.**

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 24000) \quad \& \quad n = ? \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95 \quad \& \quad 2E \leq 23550$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E \leq 23550 \implies 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 23550 \implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \tfrac{24000}{23550}\right)^2 = 15.95$$

$$\implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(150000, 24000) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(150000, \dfrac{24000}{\sqrt{25}} = 4800\right)$

$$P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) = P\left(\frac{144240-150000}{4800} \leq \overline{X} \leq \frac{153840-150000}{4800}\right)$$
$$= P(-1.2 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -1.2)$$
$$= P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 1.2) = P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 1.2)]$$
$$= 0.7881 - (1 - 0.8849) = 0.673$$

# Julio 2018
# Opción B

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y+z & = & a \\ 2x+ay-6z & = & 8 \\ x-3y-5z & = & 4 \end{array}\right\}$$

*a) (1 punto) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real $a$.*

*b) (1 punto) Resuélvase para $a=4$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)*

**Solución.**

a) $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a-12=0 \Longrightarrow a=-2$

- Si $a \neq -2 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-3F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+3\cdot 0+1\cdot 0 = 4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-8\cdot 0 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 18z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=4 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde $x$ representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.*

a) *(1 punto) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?*

b) *(1 punto) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)*

**Solución.**

a) Nos piden los máximos relativos de la función beneficio:

$$f(x) = x^3 - 12x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2$$
$$f''(x) = 6x \implies \begin{cases} f''(-2) = -12 < 0 & \implies (\cap) \implies \text{Máximo} \\ f''(2) = 12 > 0 & \implies (\cup) \implies \text{Mínimo} \end{cases}$$

Y por tanto el máximo relativo del beneficio se produce para un índice igual a $-2$ y vale $f(-2) = 16$ millones de euros.

b) Nos encontramos en el punto de abscisa $x = 4$ de la función beneficio y queremos saber si la función crece o no en ese punto.

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 = 36 > 0 \implies \text{el beneficio crecerá}$$

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Se considera la función real de variable real definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{2}{3+x} & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

*a) (1 punto) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.*

*b) (1 punto) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)*

**Solución.**

a) El dominio de $f_1(x) = x^3 + 2e^x$ es todo $\mathbb{R}$, mientras que el de $f_2(x) = \dfrac{2}{3+x}$ es $\mathbb{R} - \{-3\}$, pero $x = -3$ no pertenece al intervalo donde $f_2(x)$ ha sido definida. Por tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f(x) = x^3 + 2e^x$ que es continua por ser la suma de dos funciones continuas (polinomio y exponencial).
- Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2}{3+x}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$, luego es continua cuando $x > 0$.
- Si $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^3 + 2e^x\right) = 2$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3+x}\right) = \frac{2}{3}$
  - $f(0) = \dfrac{2}{3+0} = \dfrac{2}{3}$

  $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \implies$ hay una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(x^3 + 2e^x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4} + 2e^x\right]_{-1}^{0} = (0+2) - \left(\frac{1}{4} + 2e^{-1}\right) = \frac{7}{4} - \frac{2}{e}$

**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

*Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio tales que*

$$P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(B) = 0.6 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.8$$

*Calcúlese:*

a) *(1 punto)* $P(A \cap B)$

b) *(1 punto)* $P\left(\overline{A \cup B} \mid A\right)$

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* $S$.

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)*

**Solución.**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow \; P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.8 = 0.2$

b) $$P\left(\overline{A \cup B} \mid A\right) = \frac{P\left((\overline{A \cup B}) \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A\right)}{P(A)} = \frac{0}{0.4} = 0$$

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

*Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, $P$, que estarían dispuestos a comprarlo.*

*a) (1 punto) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).*

*b) (1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2018 - Opción B)*

**Solución.**

El intervalo de confianza para una proporción es el siguiente:

$$I.C.(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E), \text{ siendo el error } E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$



a) Hallar el mínimo $n$ de tal forma que $E \leq 0.03$, siendo $1-\alpha = 0.95$ y $\hat{p} = 0.5$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$E \leq 0.03 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \leq 0.03 \implies 1.96\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.03$

$\implies n \geq \left(\frac{1.96\cdot 0.5}{0.03}\right)^2 = 1067.11$ y por tanto $\boxed{n = 1068}$

b) $\hat{p} = \frac{90}{450} = 0.2 \implies \hat{q} = 1-\hat{p} = 0.8$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1.645\cdot\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{450}} = 0.031$

$I.C._{90\,\%}(p) = (\hat{p}-E;\hat{p}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(p) = (0.169, 0.231)}$