MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2017
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2017
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & -2 \\ -2x-az & = & 2 \\ y+az & = & -2 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a=4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2-3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2/3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim F_3 \leftrightarrows F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim_{F_3 + 4F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 2 \cdot 2 - (-1) = -2 \\ y + 4 \cdot (-1) = -2 \\ 10z = 10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros estén situados los más abajo a la derecha posible. Posteriormente hacemos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim_{4F_3 + F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 0 & -2+3a & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow -2 + 3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & -10 \end{array}\right)$ ⇒Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$ ⇒Sistema Incompatible

b) Sustituimos $a = 4$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 2 \cdot 2 - (-1) = -2 \\ \Rightarrow -4y - 6 \cdot (-1) = -2 \\ \Rightarrow 10z = -10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \;\; 2 \leq y \leq 6; \;\; x - y \geq -4; \;\; 3x - y \leq 10$$

a) *(1 punto) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *(1 punto) Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

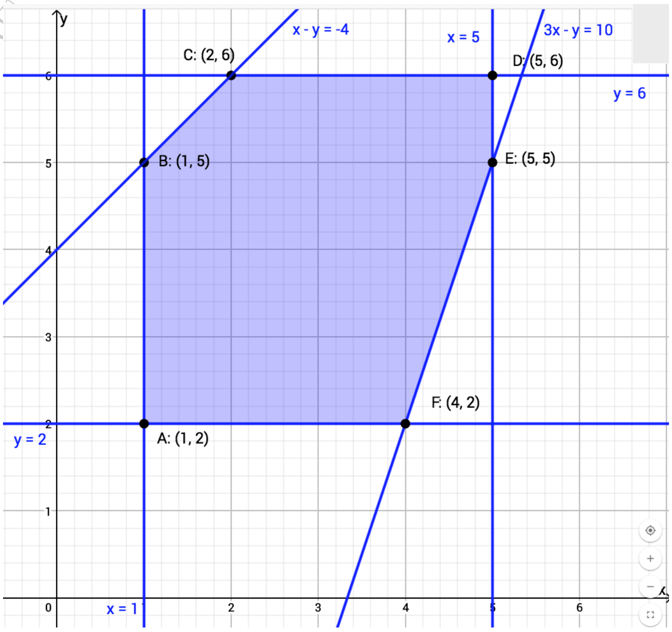
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = -200x + 600y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ① \; 1 \leq x \leq 5 & \rightarrow (1,0) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; 2 \leq y \leq 6 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (0.6) \\ ③ \; x - y \geq -4 & \rightarrow (0,4) \quad \& \quad (-4,0) \\ ④ \; 3x - y \leq 10 & \rightarrow (0,-10) \quad \& \quad (^{10}/_{3}, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	1	2	1000
B	1	5	2800
C	2	6	3200
D	5	6	2600
E	5	5	2000
F	4	2	400

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $C(2,6)$ y vale 3200, mientras que el *mínimo* se produce en $F(4,2)$ y vale 400.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real :

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si\ x < -1 \\ x^2+x-2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < -1$, $f(x) = ax+1$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x > -1$, $f(x) = x^2+x-2$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax+1) = -a+1$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+x-2\right) = -2$
  - $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \implies -a+1 = -2 \implies a = 3$$

b) Para $a = 2$ tenemos que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

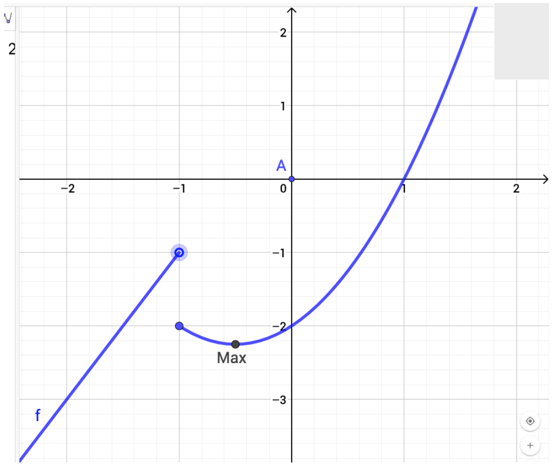
(1) Puntos de corte con los ejes
- Eje OX
  - $2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2} \not< -1 \implies \nexists$ corte con OX.
  - $x^2+x-2 = 0 \implies \begin{cases} x = -2 \ngeq -1 \implies \text{No es punto de corte} \\ x = 1 \geq -1 \implies \text{corte en } (1,0) \end{cases}$
- Eje OY
  $x = 0 \implies y = 0^2+0-2 = -2 \implies$ corte en $(0,-2)$

(2) Monotonía de la función $f(x)$.
- Si $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2x+1 \implies f'(x) = 2 > 0 \implies$ Recta creciente en $(-\infty,-1)$
- Si $x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2+x-2 \implies f'(x) = 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$ y como $f''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow (\bigcup) \Rightarrow$ *Mínimo* en $x = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto podemos resumir,

$f(x)$ corta al eje OX en $x = 1$ y al eje OY en $y = -2$

$f(x)$ es *decreciente* en $(-1, -\frac{1}{2})$ y *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ y tiene un *mínimo* relativo en $(-1/2, 9/4)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0.02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0.06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador

a) (1 punto) No salga defectuoso.

b) (1 punto) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

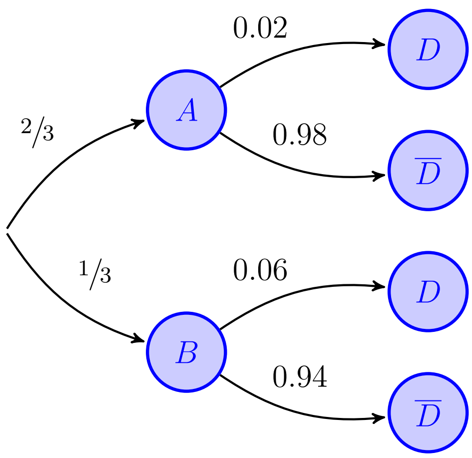
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El ordenador es del modelo A”}$$
$$B \equiv \text{“El ordenador es del modelo B”}$$
$$D \equiv \text{“El ordenador es defectuoso”}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} P(A) = 2/3 \\ P(B) = 1/3 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\overline{D}) &= P\big((A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D})\big) \\ &= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) \\ &= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{1 - P(\overline{D})} \\ &= \frac{2/3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.404 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16, calcúlese:

a) *(1 punto) La probabilidad de que la media muestral del tiempo $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.*

b) *(1 punto) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24.24, 47.76)$ para μ.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 24) \quad \overset{n=16}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(36, {}^{24}/_{\sqrt{16}} = 6)$$

$$P\left(\overline{X} \geq 48\right) = P\left(Z \geq \frac{48-36}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b) $$I.C. = (24.24, 47.76) \implies 2E = 47.76 - 24.24 \implies E = 11.76$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 11.76 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \implies z_{\alpha/2} = 1.96 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975$$
$$\implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies \alpha = 0.05 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

Por lo que el nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza en cuestión es del 95 %.

Septiembre 2017
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínese la matriz C^{40}.

b) (1 punto) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a)
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $C^3 = C \cdot C^2 = C \cdot I = C$
- $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b) $X \cdot A + 3B = C \implies X \cdot A = C - 3B \implies X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (C - 3B) \cdot A^{-1}$

$$\implies \boxed{X = (C - 3B) \cdot A^{-1}}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, y se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$.

$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

De esta forma

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) *(1 punto) Estúdiense sus asíntotas.*

b) *(1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a)
- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x-2}$ obtenemos la A. Oblicua $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^2-1}{3x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2} - \frac{1}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{9x-6} = \frac{2}{9}$$

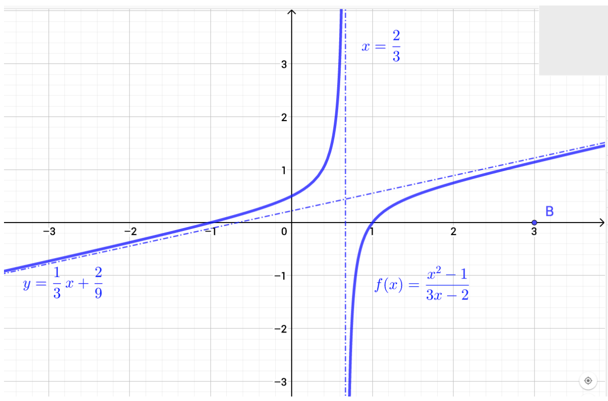
- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2/3} f(x) = \left[\frac{-5/9}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2/3^-} \dfrac{x^2-1}{3x-2} = \left[\dfrac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2/3^+} \dfrac{x^2-1}{3x-2} = \left[\dfrac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

b) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(3x-2) - 3(x^2-1)}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x-2)^2}$$
$$= 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0\ \forall x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) & \textit{Creciente} \\ f'(x) < 0\ \forall x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) & \textit{Dereciente} \end{cases}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + ax$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) (1 punto) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x + a \implies f'(2) = 4 + a = 0 \implies a = -4$$
$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies (\cup)\ \textit{Mínimo}$$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje X.
$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$.

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0) = -\frac{4}{3}$$
$$A_{tot} = |A_1| = \frac{4}{3}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0.6, por sulfatos es 0.4, y por ambos es 0.2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) (1 punto) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) (1 punto) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos: $\begin{cases} N & \equiv \text{El río está contaminado por nitratos} \\ S & \equiv \text{El río está contaminado por sulfatos} \end{cases}$

$$P(N) = 0.6 \quad \& \quad P(S) = 0.4 \quad \& \quad P(N \cap S) = 0.2$$

a) $P(\overline{N} \mid S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$

b) $$\begin{aligned} P(\overline{N} \cap \overline{S}) &= P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - [P(N) + P(S) - P(N \cap S)] \\ &= 1 - (0.6 + 0.4 - 0.2) = 0.2 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0.6$ cm.

a) (1 punto) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0.1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.6) \stackrel{n=100}{\Longrightarrow} \overline{X} = 7$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu)(6.8605, 7.1395)}$$

b) $n = ?$ $\quad E \leq 0.1 \quad 1 - \alpha = 0.98 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$

$$E \leq 0.1 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \implies n \geq \left(2.325 \cdot \frac{0.6}{0.1}\right)^2$$

$$\implies n \geq 194.6 \implies \boxed{n = 195}$$