

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



EVAU SEPTIEMBRE 2017 - Extraordinario - (Coincidentes)

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Septiembre 2017 (coincidentes)

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.
- b) (1 punto) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = I$, siendo I la matriz identidad de tamaño 3×3 .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2 \cdot (a - 2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}$
- Si $a = \{0, 2\} \implies \nexists A^{-1}$

- b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = I \implies \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}I \implies X = A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \quad x + y \leq 11; \quad x + 2y \geq 6; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

- a) (1 punto) Representese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S ?
- b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región S indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- Función objetivo:

$$f(x, y) = 3x + y$$

- Región S : Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

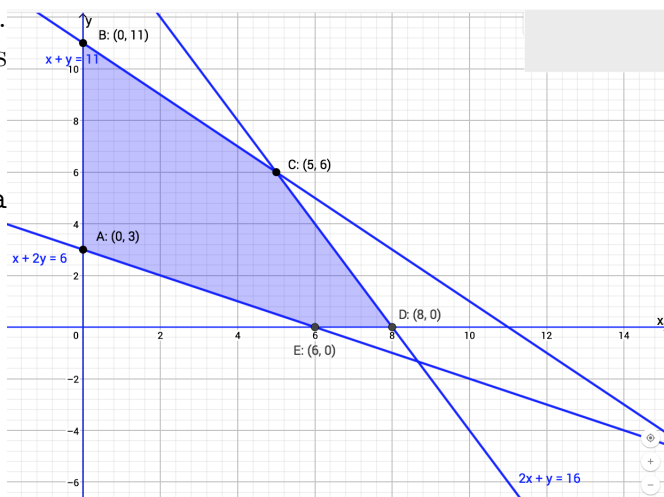
$$S = \begin{cases} \textcircled{1} \ 2x + y \leq 16 & \rightarrow (0, 16) \ \& \ (8, 0) \\ \textcircled{2} \ x + y \leq 11 & \rightarrow (0, 11) \ \& \ (11, 0) \\ \textcircled{3} \ x + 2y \geq 6 & \rightarrow (0, 3) \ \& \ (6, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- (1 punto) Región factible:

Representamos S y calculamos los vértices de la misma. $(4, 4) \in S$ ya que cumple todas las restricciones.

- (1 punto) Optimización de la función objetivo:

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	3
B	0	11	11
C	5	6	21
D	8	0	24
E	6	0	18



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $D(8, 0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $A(0, 3)$ y vale 3.

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en \mathbb{R} .
- b) (1 punto) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- a) ■ Si $x \neq \{-1, 1\}$, $f(x)$ es continua por ser polinomios.

- Si $x = -1$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$
- $f(-1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.

- Si $x = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1$
- $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

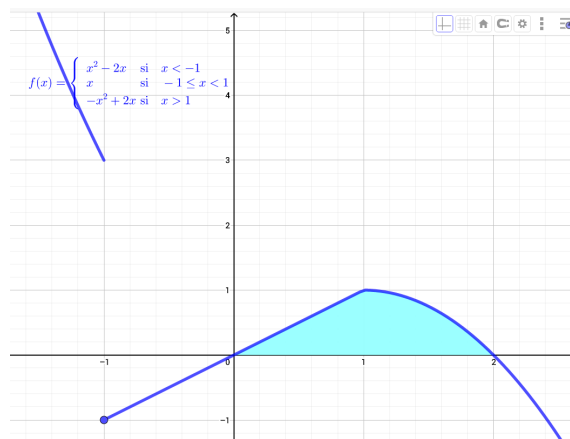
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

- b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned}
 -1 \leq x < 1 &\Rightarrow x = 0 \\
 x \geq 1 &\Rightarrow -x^2 + 2x = x(-x + 2) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 2)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} u^2$$

Ejercicio 4 (2 puntos)

En un centro de danza el 60% de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65% también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30% de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

- (1 punto) Reciba clases de flamenco.
- (1 punto) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

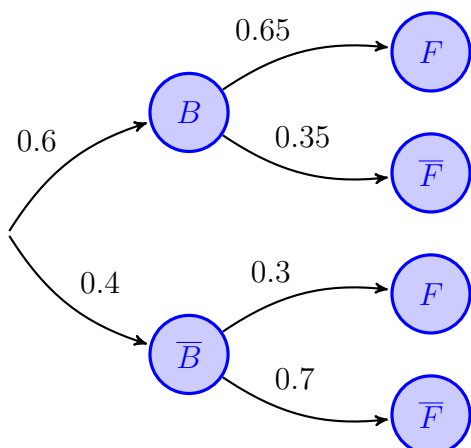
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

B = “El alumno recibe clases de ballet”

F = “El alumno recibe clases de flamenco”



$$a) P(F) = P((B \cap F) \cup (\bar{B} \cap F))$$

$$\begin{aligned}
 &P(B \cap F) + P(\bar{B} \cap F) \\
 &= P(B) \cdot P(F | B) + P(\bar{B}) \cdot P(F | \bar{B}) \\
 &= 0.6 \cdot 0.65 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.51
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) P(B | \bar{F}) &= \frac{P(B \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{F} | B)}{1 - P(F)} \\
 &= \frac{0.6 \cdot 0.35}{1 - 0.51} = 0.429
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

- a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. Estos precios son los siguientes:

140; 125; 140; 175; 135; 165; 175; 110; 150; 130.

Determinése un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ .

- b) (1 punto) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=10} \bar{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144.5$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}} = 9.3$$

$$I.C._{95\%}(\mu) = (\bar{x} - E; \bar{x} + E) \implies I.C._{95\%}(\mu) = (135.2, 153.7)$$

b) $n = ? \quad E \leq 8 \quad 1 - \alpha = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E \leq 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 \implies n = 14$$

Septiembre 2017 (coincidentes)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{rcl} -x + ay + z & = & 3 \\ 2y + 2z & = & 0 \\ x + 3y + 2z & = & -3 \end{array} \right\}$$

a) (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a .

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \implies \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} \implies \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan

solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -x + \lambda = 3 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = (3x^2 - 2x)^2$$

a) (1 punto) Calcúlese $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

b) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Desarrollamos el cuadrado: $f(x) = (3x^2 - 2x)^2 = 9x^4 + 4x^2 - 12x^3$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (9x^4 + 4x^2 - 12x^3) dx = \left[\frac{9}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^4 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{9}{5} + \frac{4}{3} - 3 \right) \\ &\quad - \left(-\frac{9}{5} - \frac{4}{3} - 3 \right) = \frac{2}{15} + \frac{92}{15} = \frac{94}{15} \end{aligned}$$

b) El punto de tangencia es $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)^2 = 64$

$$f'(x) = 36x^3 + 8x - 36x^2$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = 160$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 64 = 160 \cdot (x - 2) \implies \boxed{r \equiv y = 160x - 256}$$

_____ o _____

Ejercicio 3 (2 puntos)

La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

, donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para que no haya ganancias ni pérdidas el beneficio ha de ser cero:

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \implies x = \frac{-120 \pm 40}{-2} = \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$$

b) Para obtener el máximo de la función beneficio:

$$b'(x) = -2x + 120 = 0 \implies x = 60$$

$$b''(x) = -2$$

$$b''(60) = -2 < 0 \implies (\cap) \implies \text{Máximo}$$

Luego fabricando 60 metros de cable obtendremos un beneficio máximo igual a $b(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$ euros.

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.5$, $P(A | B) = 0.375$ y $P(B \cap A) = 0.3$. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Ocurra B .
- b) (1 punto) Ocurra B pero no A .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- a) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{P(B)} = 0.375 \implies P(B) = \frac{0.3}{0.375} = 0.8$
- b) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros ($l/100\text{ km}$), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2\text{ l/100 km}$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

- a) (1 punto) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4.528, 5.2)$ para μ .
- b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 4.8\text{ l/100 km}$. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, \bar{X} , esté comprendida entre 4.5 y 5.1 $l/100\text{ km}$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.2) \xrightarrow{n=49} \bar{X} :$

$$2E = 5.2 - 4.528 = 0.672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0.672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1.2} = 1.96 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

b) $X : \mathcal{N}(4.8, 1.2) \xrightarrow{n=49} \bar{X} : \mathcal{N}(4.8, 1.2/\sqrt{49} = 0.1714)$

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq \bar{X} \leq 5.1) &= P\left(\frac{4.5 - 4.8}{0.1714} \leq Z \leq \frac{5.1 - 4.8}{0.1714}\right) = P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = -0.9599 - (1 - 0.9599) \\ &= 0.9198 \end{aligned}$$