

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS EXAMENES RESUELTOS



EVAU SEPTIEMBRE 2017 - Extraordinario - (Coincidentes)

<https://aprendeconmigomelon.com>

Iñigo Zunzunegui Monterrubio



Septiembre 2017 (coincidentes)

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.
- b) (1 punto) Determíñese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = I$, siendo I la matriz identidad de tamaño 3×3 .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2 \cdot (a-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\}$ $\implies \exists A^{-1}$
- Si $a = \{0, 2\}$ $\implies \nexists A^{-1}$

- b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = I \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}I \implies X = A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \quad x + y \leq 11; \quad x + 2y \geq 6; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

- a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S ?
- b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región S indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- Función objetivo:

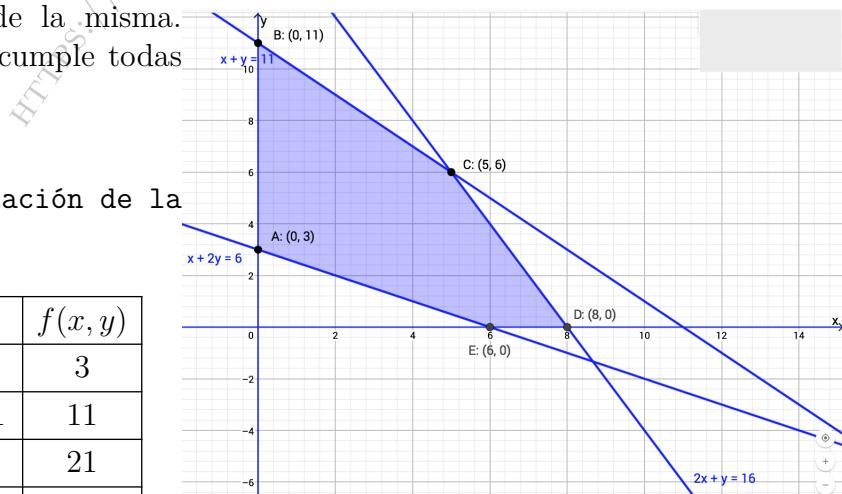
$$f(x, y) = 3x + y$$

- Región S : Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad 2x + y \leq 16 \rightarrow (0, 16) \quad \& \quad (8, 0) \\ \textcircled{2} \quad x + y \leq 11 \rightarrow (0, 11) \quad \& \quad (11, 0) \\ \textcircled{3} \quad x + 2y \geq 6 \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (6, 0) \\ x, y \geq 0 \end{array} \end{cases}$$

- (1 punto) Región factible:

Representamos S y calculamos los vértices de la misma. $(4, 4) \in S$ ya que cumple todas las restricciones.



- (1 punto) Optimización de la función objetivo:

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	3
B	0	11	11
C	5	6	21
D	8	0	24
E	6	0	18

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $D(8, 0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $A(0, 3)$ y vale 3.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en \mathbb{R} .
- (1 punto) Determíñese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- a) ■ Si $x \neq \{-1, 1\}$, $f(x)$ es continua por ser polinomios.

- Si $x = -1$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$
- $f(-1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.

- Si $x = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 2x) = 1$
- $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

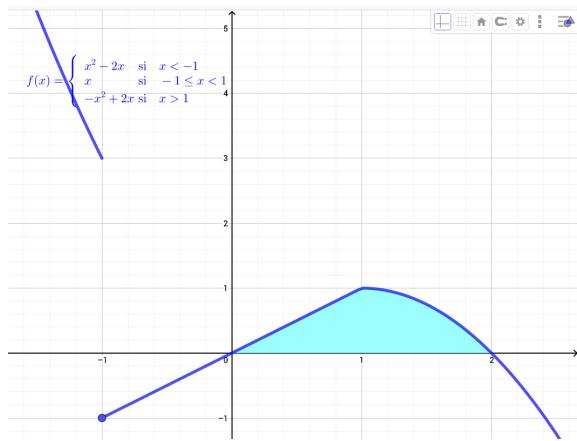
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

- b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned}
 -1 \leq x < 1 &\Rightarrow x = 0 \\
 x \geq 1 &\Rightarrow -x^2 + 2x = x(-x + 2) = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 2)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

Ejercicio 4 (2 puntos)

En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) (1 punto) Reciba clases de flamenco.

b) (1 punto) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

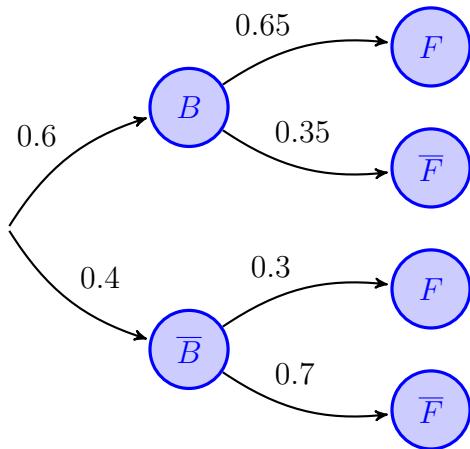
(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos

B = “El alumno recibe clases de ballet”

F = “El alumno recibe clases de flamenco”



$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(F) &= P((B \cap F) \cup (\bar{B} \cap F)) \\
 &= P(B) \cdot P(F | B) + P(\bar{B}) \cdot P(F | \bar{B}) \\
 &= 0.6 \cdot 0.65 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.51
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(B | \bar{F}) &= \frac{P(B \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{F} | B)}{1 - P(F)} \\
 &= \frac{0.6 \cdot 0.35}{1 - 0.51} = 0.429
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

- a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. estos precios son los siguientes:

140; 125; 140; 175; 135; 165; 175; 110; 150; 130.

Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ .

- b) (1 punto) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \xrightarrow{n=10} \bar{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144.5$
 $1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$
 $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}} = 9.3$
 $I.C.95\%(\mu) = (\bar{x} - E; \bar{x} + E) \implies I.C.95\%(\mu) = (135.2, 153.7)$

b) $n = ? \quad E \leq 8 \quad 1 - \alpha = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$
 $E \leq 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 13.5 \implies n = 14$

----- o -----

Septiembre 2017 (coincidentes)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{array}{lcl} -x + ay + z & = & 3 \\ 2y + 2z & = & 0 \\ x + 3y + 2z & = & -3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

- (1 punto) Discútase el sistema para los diferentes valores de a .
- (1 punto) Resuélvase para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \implies \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}$ (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right)$
 $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \implies \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}$ (Infinitas soluciones)

- Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan

solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -x + \lambda = 3 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

————— o —————

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = (3x^2 - 2x)^2$$

a) (1 punto) Calcúlese $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

b) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Desarrollamos el cuadrado: $f(x) = (3x^2 - 2x)^2 = 9x^4 + 4x^2 - 12x^3$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (9x^4 + 4x^2 - 12x^3) dx = \left[\frac{9}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^4 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{9}{5} + \frac{4}{3} - 3 \right) \\ &\quad - \left(-\frac{9}{5} - \frac{4}{3} - 3 \right) = \frac{2}{15} + \frac{92}{15} = \frac{94}{15} \end{aligned}$$

b) El punto de tangencia es $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2)^2 = 64$

$$f'(x) = 36x^3 + 8x - 36x^2$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = 160$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - 64 = 160 \cdot (x - 2) \Rightarrow r \equiv y = 160x - 256$$

————— o —————

Ejercicio 3 (2 puntos)

La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

, donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

- (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?
- (1 punto) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- Para que no haya ganancias ni pérdidas el beneficio ha de ser cero:

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \implies x = \frac{-120 \pm 40}{-2} = \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$$

- Para obtener el máximo de la función beneficio:

$$\begin{aligned} b'(x) &= -2x + 120 = 0 \implies x = 60 \\ b''(x) &= -2 \\ b''(60) &= -2 < 0 \implies (\cap) \implies \text{Máximo} \end{aligned}$$

Luego fabricando 60 metros de cable obtendremos un beneficio máximo igual a $b(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$ euros.

————— o —————

Ejercicio 4 (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.5$, $P(A | B) = 0.375$ y $P(B \cap A) = 0.3$. Calcúlese la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Ocurra B .
- b) (1 punto) Ocurra B pero no A .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$a) P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{P(B)} = 0.375 \implies P(B) = \frac{0.3}{0.375} = 0.8$$

$$b) P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

————— o —————

Ejercicio 5 (2 puntos)

El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros ($l/100 km$), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2 l/100 km$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

- a) (1 punto) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4.528, 5.2)$ para μ .
- b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 4.8 l/100 km$. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, \bar{X} , esté comprendida entre 4.5 y 5.1 $l/100 km$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$a) X : \mathcal{N}(\mu, 1.2) \xrightarrow{n=49} \bar{X} :$$

$$2E = 5.2 - 4.528 = 0.672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0.672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1.2} = 1.96 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

$$b) X : \mathcal{N}(4.8, 1.2) \xrightarrow{n=49} \bar{X} : \mathcal{N}(4.8, 1.2/\sqrt{49} = 0.1714)$$

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq \bar{X} \leq 5.1) &= P\left(\frac{4.5 - 4.8}{0.1714} \leq Z \leq \frac{5.1 - 4.8}{0.1714}\right) = P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = -0.9599 - (1 - 0.9599) \\ &= 0.9198 \end{aligned}$$

————— o —————