MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2017
- Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2017

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\mid A \mid = 2 - 2k^2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \Longrightarrow \exists A^{-1}$
- Si $k = \{-1, 1\} \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

b) Para $k = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = B$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 6y \geq 6\,;\; 5x - 2y \geq -2\,;\; x + 3y \leq 20\,;\; 2x - y \leq 12\right\}$$

a) *Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

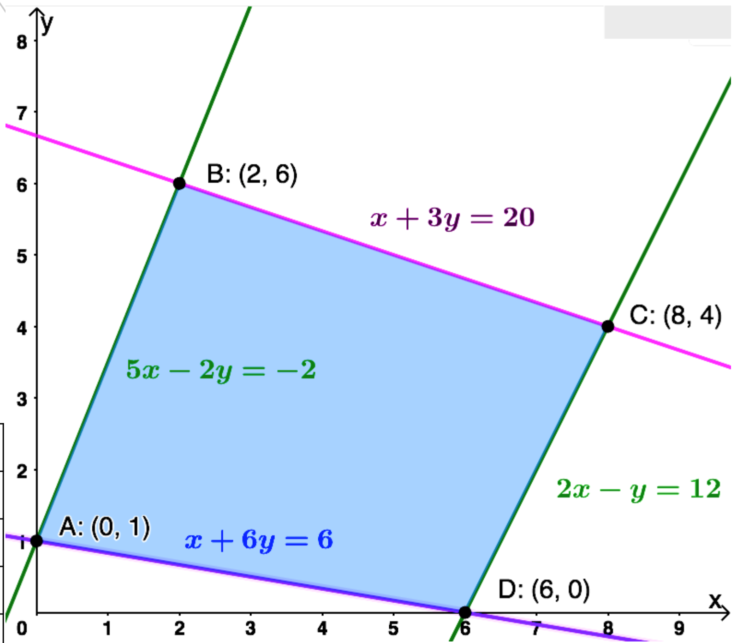
- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 4x - 3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} ①\; x + 6y \geq 6 & \to (0,1) \quad \& \quad (6,0) \\ ②\; 5x - 2y \geq -2 & \to (0,1) \quad \& \quad (-0.4,0) \\ ③\; x + 3y \leq 20 & \to (0,20/3) \quad \& \quad (20,0) \\ ④\; 2x - y \leq 12 & \to (0,-12) \quad \& \quad (6,0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	6	0	24
B	0	1	-3
C	2	6	-10
D	8	4	20

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(6,0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $C(2,6)$ y vale -10.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> a) *(1 punto) Determínese el valor de la derivada de la función* $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.
>
> b) *(1 punto) Estúdiense las asíntotas de la función* $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)*

Solución.

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{e^x(1+x-1)}{(1+x)^2} = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} \implies f'(0) = 0$

b)
- `A.Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$
- `A.Oblícua` Sea la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % *de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el* 40 % *tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es* 0.01 *si tiene una antigüedad inferior a dos años;* 0.05 *si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y* 0.12 *si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:*

a) (1 punto) Se estropee.

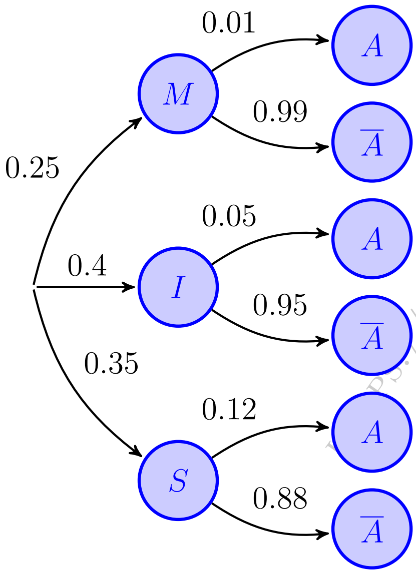
b) (1 punto) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

$M \equiv$ Antigüedad < 2 años $\qquad I \equiv 2 <$ Antigüedad < 4 años

$S \equiv$ Antigüedad > 4 años $\qquad E \equiv$ La furgoneta se estropea



a) $P(E) = P\big((M \cap E) \cup (I \cap E) \cup (S \cap E)\big)$

$$= P(M \cap E) + P(I \cap E) + P(S \cap E)$$
$$= P(M) \cdot P(E \mid M) + P(I) \cdot P(E \mid I)$$
$$+ P(S) \cdot P(E \mid S) = 0.25 \cdot 0.01$$
$$+ 0.4 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.12 = 0.0645$$

b) $P(S \mid \overline{E}) = \dfrac{P(S \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(S) \cdot P(\overline{E} \mid S)}{1 - P(E)}$

$$= \frac{0.35 \cdot 0.88}{1 - 0.0645} = 0.329$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0.9 kg.

a) *(1 punto) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{X} = 7.8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99.2 % para μ.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0.2 kg.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \xrightarrow{n=324} \overline{X} = 7.8$$

$$1-\alpha = 0.992 \implies \alpha = 0.008 \implies \alpha/2 = 0.004 \implies 1-\alpha/2 = 0.996 \implies z_{\alpha/2} = 2.65$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.65 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{324}} = 0.1325$$

$$I.C._{99.2\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99.2\,\%}(\mu) = (7.67, 7.93)}$$

b) $$X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \xrightarrow{n=?} 2E = 0.2$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E \leq 0.2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{0.2}\right)^2$$

$$\implies n \geq 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

Junio 2017
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - ay + 2z & = & 0 \\ ax - 4y - 4z & = & 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuélvase para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a^2 + 6a + 36 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2, 3\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$).

- Si $a = -2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_2 - 3F_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x - 6\lambda + 2\lambda &= 0 \\ 5y - 10t &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) *(1 punto) Calcúlense* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{1-x^3}$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

b) *(1 punto) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

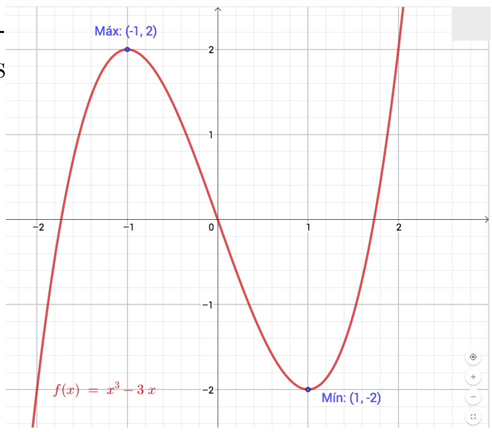
a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x}{1-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+3x}{1+x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2-3)}{\cancel{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x^2-3) = -3$$

a) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del sigo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$



Luego $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$ y tiene un *máximo* en $(-1, 2)$ y un *mínimo* en $(1, -2)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+2} & si\ x \le 0 \\ x+2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcúlese $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

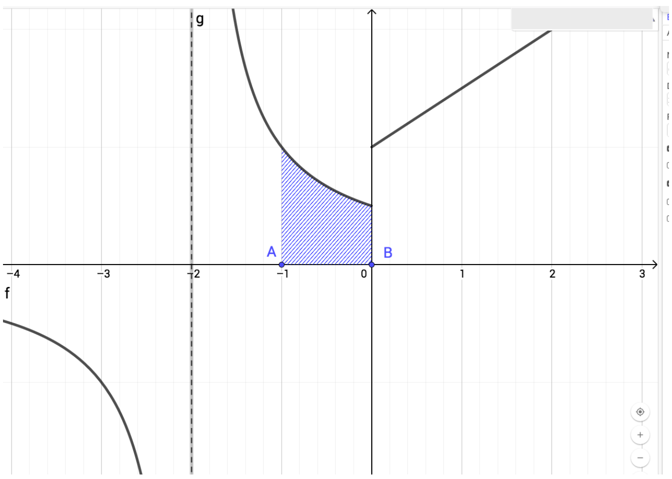
a)
- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- Si $x > 0$, $f(x) = x + 2$, que es contínua por ser un polinomio.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x+2} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x + 2 = 2$
  - $f(0) = \dfrac{2}{0+2} = 1$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = 0$, donde existe una discontinuidad de salto finito.

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) Para el cálculo de la integral tenemos que determinar cuál es expresión de $f(x)$ entre los límites de integración $x = -1$ y $x = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(x)\,dx. &= \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= 2\ln|x+2|\big]_{-1}^{0} \\ &= \ln(x+2)^2\Big]_{-1}^{0} \\ &= (\ln 4) - (\cancelto{0}{\ln 1}) \\ &= \ln 4\end{aligned}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0.20. *Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es* 0.9. *Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:*

a) (1 punto) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) (1 punto) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.
Sean los sucesos:

$$J \equiv \text{“Ser joven”}$$
$$S \equiv \text{“Leer prensa al menos una vez a la semana”}$$

$$P(J) = 0.3 \quad \& \quad P(S \mid J) = 0.2 \quad \& \quad P(\overline{J} \mid S) = 0.9$$

a) Hallar $P(\overline{S})$

$$P(S \mid J) = 0.2 \implies \frac{P(S \cap J)}{P(J)} = \frac{P(S \cap J)}{0.3} = 0.2 \implies P(S \cap J) = 0.06$$
$$P(\overline{J} \mid S) = 0.9 \implies \frac{P(\overline{J} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) - P(S \cap J)}{P(S)} = \frac{P(S) - 0.06}{P(S)} = 0.9$$
$$\implies 0.1P(S) = 0.06 \implies P(S) = 0.6 \implies P(\overline{S}) = 0.4$$

b) $P(\overline{S} \cup \overline{J}) = P(\overline{S \cap J}) = 1 - P(S \cap J) = 1 - 0.06 = 0.94$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria smple de 484 contenedrores.

a) (1 punto) Si la media de la muestra es $\overline{X} = 25.9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) (1 punto) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \quad \overset{n=484}{\longrightarrow} \quad \overline{X} = 25.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0.2243$$
$$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (25.68; 26.12)}$$

b) $X : \mathcal{N}(23, 3) \quad \overset{n=484}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(23, 3/\sqrt{484} = 0.136)$

Nos piden la probabilidad de que los 484 contenedores puedan ser transportados en un barco con capacidad máxima de 11000 T. Es decir, $484 \cdot \overline{X} \leq 11000$, o lo que es lo mismo, que $\overline{X} \leq 22.73$ T.

$$P(\overline{X} \leq 22.73) = P\left(Z \leq \frac{22.73 - 23}{0.136}\right) = P(Z \leq -1.98) = P(Z \geq 1.98)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239$$