# MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
# EXAMENES RESUELTOS

# EVAU JUNIO 2016
## - Ordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

# Junio 2016
# Opción A

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Considérense las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*a) (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz* $A \cdot C \cdot C^{\top} \cdot A^{-1}$

*b) (1 punto) Calcúlese la matriz* $M = A \cdot B$. *¿Existe* $M^{-1}$*?*

Nota: $C^{\top}$ *denota la matriz traspuesta de la matriz* $C$.

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)*

**Solución.**

a) $\left|A \cdot C \cdot C^{\top} \cdot A^{-1}\right| \overset{\odot}{=} |A| \cdot |C| \cdot \left|C^{\top}\right| \cdot |A^{-1}| \overset{\circledast}{=} \cancel{|A|} \cdot |C| \cdot |C| \cdot \dfrac{1}{\cancel{|A|}} = |C|^2 = 2^2 = 4$

$\odot$ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$\circledast$ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \qquad \& \qquad \left|C^{\top}\right| = |C|$

b) $M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$

Como la matriz $M$ no es cuadrada no es invertible ($\nexists\, A^{-1}$).

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Sea $S$ la región del plano definida por:*

$$y + x \leq 5 \qquad \& \qquad y - x \leq 3 \qquad \& \qquad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

*a) (1 punto) Represéntese la región $S$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

*b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en la región $S$ indicando los puntos de $S$ en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)*

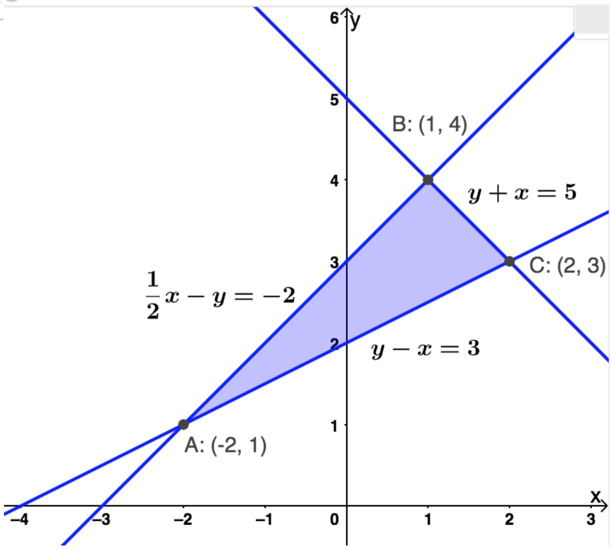
**Solución.**

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; y + x \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; y - x \leq 3 & \rightarrow (0,3) \quad \& \quad (-3,0) \\ ③ \; \frac{1}{2}x - y \leq -2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x, y) = 2x + y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.




- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

| Punto | $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| A | $-2$ | 1 | $-3$ |
| B | 1 | 4 | 6 |
| C | 2 | 3 | 7 |

El *mínimo* de la función es de $-3$ y se produce en el punto $A(-2, 1)$.
El *máximo* es de 7 y se produce en el punto $C(2, 3)$.

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Se considera la función real de variable real:*

$$f(x) = x^3 + 8$$

a) *(1 punto) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.*

b) *(1 punto) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)*

**Solución.**

a) Hallamos los puntos de corte con el eje $OX$.

$$x^3 + 8 = 0 \implies x = \sqrt[3]{-8} \implies x = -2$$

Lo que delimita dos recintos de integración: $A_1 = (-3, -2)$ y $A_2 = (-2, -1)$

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} \left(x^3 + 8\right) dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-3}^{-2} = \left(\frac{81}{4} - 24\right) - (4 - 16) = -\frac{33}{4}$$

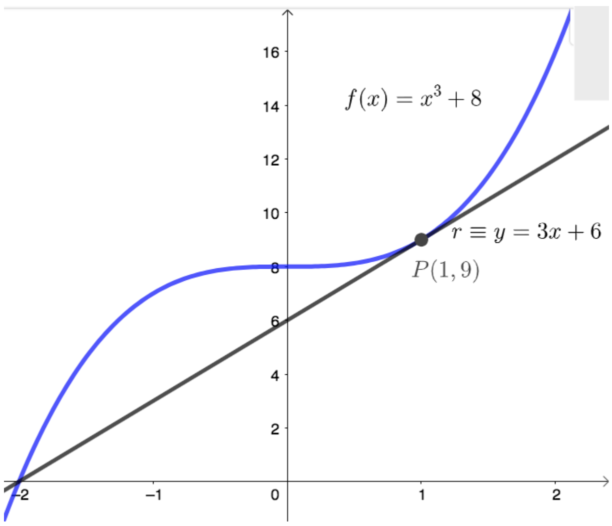
$$A_2 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} = (-12) - \left(\frac{1}{4} - 8\right) = -\frac{17}{4}$$

$$Area = |A_1| + |A_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2}\, u^2$$



b) Recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$

$$x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 9$$
$$\implies (x_0, y_0) = (1, 9)$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0)$$
$$y - 9 = 3 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = 3x + 6$$



**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

*Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:*

*a) (1 punto) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.*

*b) (1 punto) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$H \equiv \text{"El músico es varón"}$$
$$M \equiv \text{"El músico es mujer"}$$
$$C \equiv \text{"El instrumento interpretado es de cuerda"}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(H) = 0.55 \quad \& \quad P(M) = 0.45 \quad \& \quad P(C) = 0.3 \quad \& \quad P(C \mid M) = 0.25$$

a) $P(C \mid M) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(C \cap M)}{0.45} = 0.25 \implies P(C \cap M) = 0.25 \cdot 0.45 = 0.1125$

$P(M \mid C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0.1125}{0.3} = 0.375$

b) $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap M)$

$P(C \cap H) = P(C) - P(C \cap M) = 0.3 - 0.1125 = 0.1875$

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

*La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.*

*a) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para $\mu$ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.*

*b) (1 punto) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas $\overline{X}$ sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Producción diaria de leche } (\ell)\text{”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 30)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95 \qquad \& \qquad 2E \leq 10$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2E \leq 10 \Rightarrow 2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{50}{10}\right)^2 = 384.16 \Rightarrow \boxed{n = 385}$$

b) $X : \mathcal{N}(950, 50) \xrightarrow{n=25} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = \mathcal{N}(950, 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940-950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

# Junio 2016
# Opción B

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Se considera el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ x+ay+2z=0 \end{cases}$$

*a) (1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

*b) (1 punto) Resuélvase para $a=0$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)*

**Solución.**

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes $A$.

$$|A| = 4-2a = 0 \implies a=2$$

- Si $a \neq 2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - \frac{1}{2} = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

## MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow 2a - 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \square & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPAT. DETERMINADO
- Si $a = 2 \Rightarrow F_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{rl} \Rightarrow x - \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/2 \\ y = 1/4 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Se considera la función real de variable real*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+b}{x-2} & si\ x\leq -1\\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & si\ x>-1\end{cases}$$

a) *(1 punto) Determínese para qué valores del parámetro $b$ la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.*

b) *(1 punto) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)*

**Solución.**

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x+b}{x-2}=\dfrac{1+b}{-3}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}\cdot(x+5)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+5}{x+3}=2$

$f(-1)=\dfrac{1+b}{-3}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

$\Longrightarrow \dfrac{1+b}{-3}=2 \Longrightarrow \boxed{b=-7}$

b)

- `A. Vertical` Buscamos las A. Verticales entre las raíces del denominador.

$$x-2=0 \Longrightarrow \cancel{x=2}>-1$$

$$x^2+4x+3=0 \Longrightarrow \begin{cases}x=-1\\ \cancel{x=-3}<-1\end{cases}$$

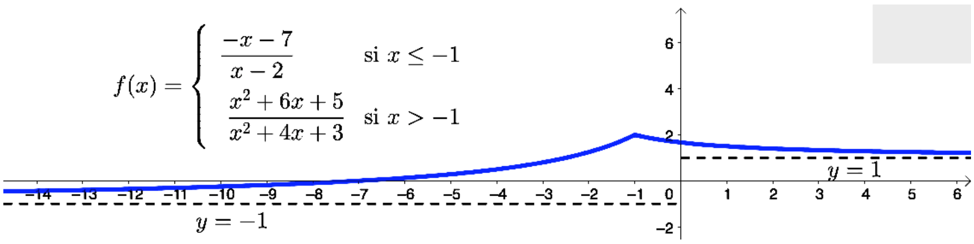
$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+6x+5}{x^2-4x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x+5)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)}=2\Rightarrow \nexists\ A.V.$$

- `A. Horizontal`

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+b}{x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+b}{-x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-1\Rightarrow \underset{x\to -\infty}{A.H.}\ \text{en } y=-1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=1\Rightarrow \underset{x\to +\infty}{A.H.}\ \text{en } y=1$$

- `A. Oblicua` Como hay $A.H. \Longrightarrow \nexists\ A.O.$



**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:*

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

*a) (1 punto) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.*

*b) (1 punto) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)*

**Solución.**

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(6x^2 + 4x - 2\right)dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$

$f(0) = 5 \implies C = 5 \implies f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$

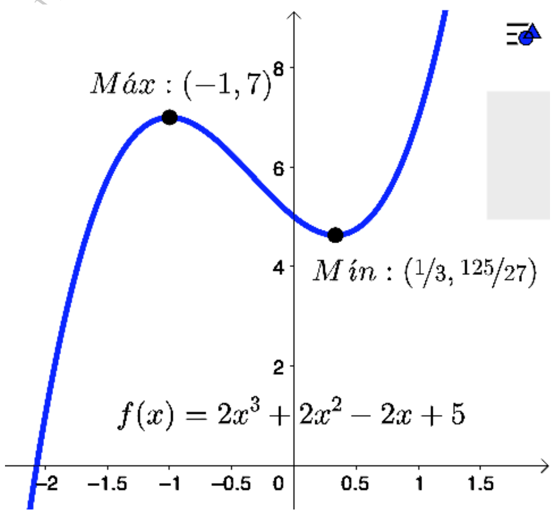
b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 0 \implies x = \{-1, 1/3\}$$



| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1/3)$ | $(1/3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | Creciente $\nearrow$ | Decreciente $\searrow$ | Creciente $\nearrow$ |

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1/3)$ y tiene un *máximo relativo* en $(-1, 7)$ y un *mínimo realtivo* en $(1/3, 125/27)$.



**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

*Tenemos dos urnas $A$ y $B$. La urna $A$ contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna $B$ contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna $A$ y se deposita en la urna $B$. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna $B$. Calcúlese la probabilidad de que:*

*a) (1 punto) La segunda bola extraída sea roja.*

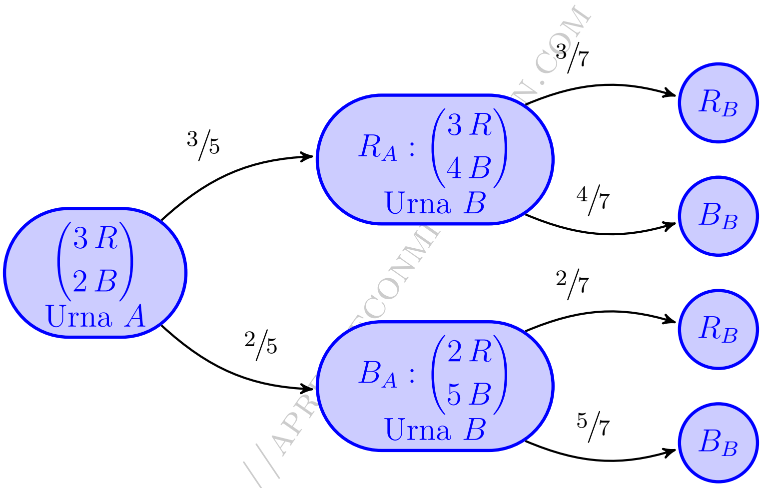
*b) (1 punto) las dos bolas extraídas sean blancas.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)*

**Solución.**

Sean los sucesos:

$$R_i \equiv \text{“Se extrae una bola roja de la urna } i\text{”}$$
$$B_i \equiv \text{“Se extrae una bola blanca de la urna } i\text{”}$$




a) $P(R_B) = P\big((R_A \cap R_B) \cup (B_A \cap R_B)\big) = P(R_A \cap R_B) + P(B_A \cap R_B)$

$$= P(R_A) \cdot P(R_B \mid R_A) + P(B_A) \cdot P(R_B \mid B_A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0.371$$

b) $P(B_A \cap B_B) = P(B_A) \cdot P(B_B \mid B_A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7} = 0.286$

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

*El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.*

a) *(1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para $\mu$.*

b) *(1 punto) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.*

*(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B)*

**Solución.**

$$X \equiv \text{“Peso de la gamba Palamós (g)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 5)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 5) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 70$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xRightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (68.04; 71.96)}$$

b) $X : \mathcal{N}(70, 5) \xrightarrow{n=12} \overline{X} : \mathcal{N}\left(70, \dfrac{5}{\sqrt{12}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq \frac{855}{12}\right) = P\left(\overline{X} \geq 71.25\right) = P\left(Z \geq \frac{71.25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq 0.87)$$
$$= 1 - P(Z < 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$$