MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2016
- Ordinario -
(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2016
Opción A (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro* a.

b) *(1 punto) Resuélvase para* $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \{-2, 2\}$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq \{-2, 2\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 3x + 1 = -2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -y - 1 = -2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow 8z = -8 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & a-2 \\ 1 & 3 & a & a-2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 5 & 2a-1 & 2a-4 \end{array}\right) \overset{a \neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ (2a+1)F_3 - 5F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & 3 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 4a^2 - 16 & 4 \cdot (a-2)^2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 - 16 = 0 \\ \boxed{a = \pm 2} \end{array} \right.$$

- Si $a = -1/2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \square & 3 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a = -2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

- Si $a=2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a=0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_1 \leftrightarrow C_2$, por lo que las incógnitas $x \leftrightarrow y$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2y + -1 - 1 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 3\cdot(-1) = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -16z = 16 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = -1 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

a) (1 punto) Escríbase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

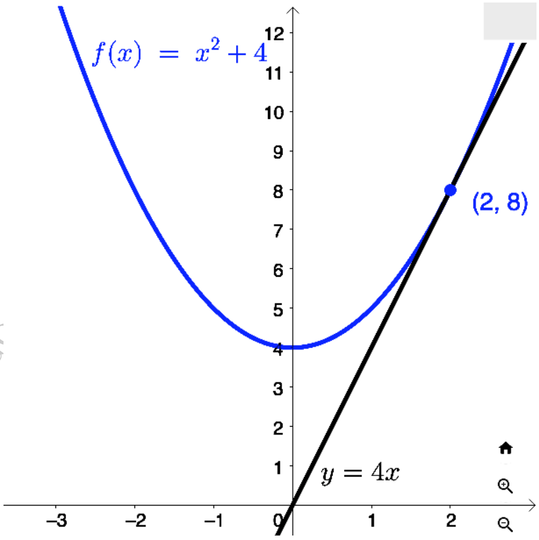
b) (1 punto) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

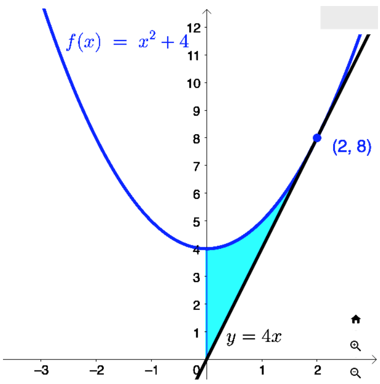
a) Hallamos la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = 8 \\ \implies (x_0, y_0) = (2, 8) \\ f'(x) = 2x \\ m_r = f'(x_0) = f'(2) = 4 \\ r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \\ y - 8 = 4 \cdot (x - 2) \\ r \equiv y = 4x \end{aligned}$$



b) Area comprendida entre $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = 4x$ y el eje de ordenadas $(x = 0)$

- Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 4$
- Hallamos el área comprendida entre $h(x)$, el eje de abscisas y $x = 0$.
  - Corte con el eje OX: $x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x = 2$
  - Lo que define un recinto de integración $A_1 = (0.2)$



$$A_1 = \int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}$$

$$Area = |A_1| = \frac{8}{3} = 2.67\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

a) (1 punto) Determínense las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determínense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales entre las raíces del denominador $x + 2 = 0 \implies x = -2$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

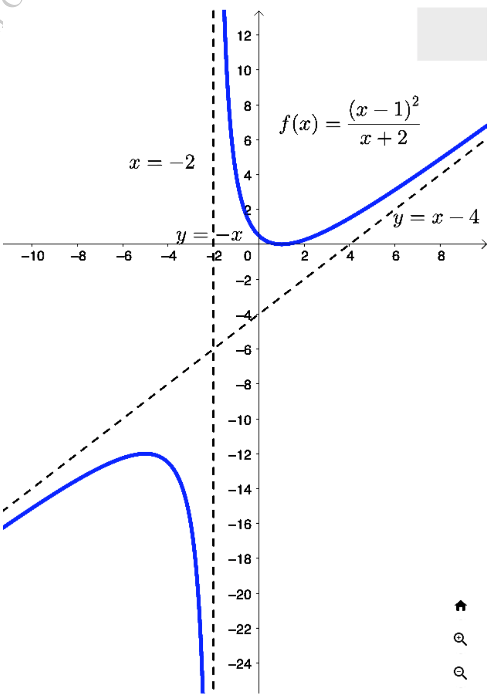
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x+1}{x+2}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -4$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x - 4$.



b) Calculamos los puntos singulares

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+2) - (x-1)^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x-2)^2} = 0$$

$$\implies x^2 + 4x - 5 = 0 \implies x = \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-5,1)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(1,0)$ y un *máximo relativo* en $(-5,-12)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0.5$ y $P\left(\overline{B}\right)=0.8$. Calcúlese:

a) (1 punto) $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$.

b) (1 punto) $P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $P(A\cap B)\underset{ind.}{\overset{A\ y\ B}{=}}P(A)\cdot P(B)=P(A)\cdot\left[1-P(\overline{B})\right]=0.5\cdot(1-0.8)=0.1$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+(1-0.8)-0.1=0.6$

b) $P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})}=\dfrac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-0.6}{1-0.8}=0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en kilogramos kg de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0.60$ kg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{x} = 3.250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0.2 kg.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los recién nacidos (kg)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 0.6)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.6) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 3.25$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \overset{Tabla}{\implies} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$I.C._{98\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{98\,\%}(\mu) = (3.1105; 3.3895)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 95\,\% \qquad \& \qquad E \leq 0.2$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \overset{Tabla}{\implies} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.6}{0.2}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

Junio 2016
Opción B (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real

a) *(1 punto) Determínese a para que la matriz admita inversa.*

b) *(1 punto) Para $a = 1$, determínese la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = -a^2 + 2a = a \cdot (2 - a) = 0 \implies a = \{0, 2\}$, luego $\exists\ A^{-1}\ \forall a \neq \{0, 2\}$

b) Para $a = 1$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = 1 \cdot (2 - 1) = 1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + A = I \implies A \cdot X = I - A \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (I - A) \implies X = A^{-1} \cdot (I - A)$$

$$X = A^{-1} \cdot (I - A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por

$$x + y \leq 5 \quad \& \quad 2x - y \geq -2 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 1$$

a) (1 punto) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 2x - 3y$ en la región S indicando los punots de S en los que se alcanzan dichos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

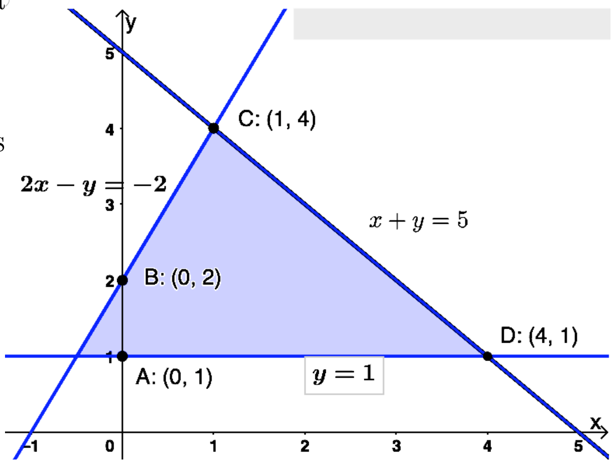
Solución.

- `Región Factible` Escribimos las restricciones

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; 2x - y \geq -2 & \rightarrow (0,2) \quad \& \quad (-1,0) \\ ③ \; x \geq 0 & \rightarrow (0,0) \\ ④ \; y \geq 1 & \rightarrow (0,1) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 2x - 3y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	-3
B	0	2	-6
C	1	4	-10
D	4	1	5

El *mínimo* de la función $f(x,y)$ es de -10 y se produce en el punto $C : (1,4)$.
El *máximo* de la función $f(x,y)$ es de 5 y se produce en el punto $D : (4,1)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$$

a) (1 punto) Determínense los valores de los parámetros reales a y b si se sabe que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

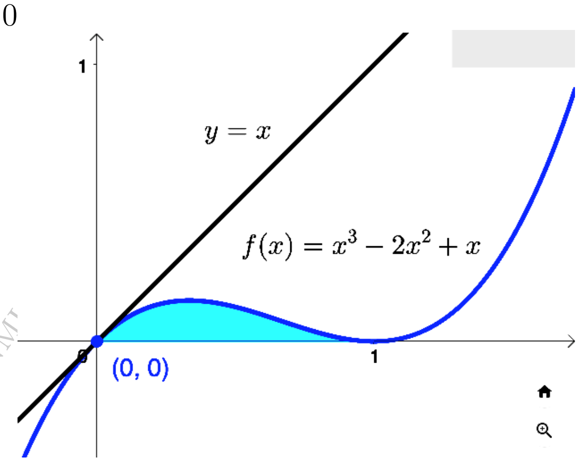
b) (1 punto) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$ y la igualamos a $y = x$

$$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = b$$
$$\implies (x_0, y_0) = (0, b)$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + a$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = a$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - b = a \cdot (x - 0)$$
$$\left.\begin{array}{l} r \equiv y = ax + b \\ r \equiv y = x \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array}}$$



b) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ con el eje OX

$$x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lo que define el recinto de integración $A_1 = (0.1)$

$$A_1 = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{12}$$

$$Area = |A_1| = \frac{1}{12} = 0.0833\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

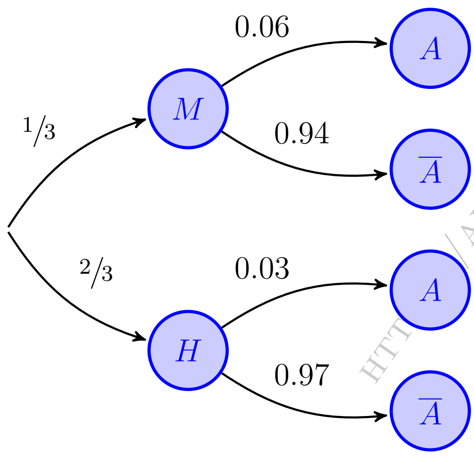
> *En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:*
>
> *a) (1 punto) Padezca albinismo.*
>
> *b) (1 punto) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“El individuo es macho”}$$
$$H \equiv \text{“El individuo es hembra”}$$
$$A \equiv \text{“El individuo es albino”}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(H) = 2 \cdot P(M) \\ P(H) + P(M) = 1 \end{array}\right\} \implies 2P(M) + P(M) = 1 \implies \begin{cases} P(M) = 1/3 \\ P(H) = 2/3 \end{cases}$$



a) $P(A) = P\big((M \cap A) \cup (H \cap A)\big)$
$= P(M \cap A) + P(H \cap A)$
$= P(M) \cdot P(A \mid M) + P(H) \cdot P(A \mid H)$
$= \dfrac{1}{3} \cdot 0.06 + \dfrac{2}{3} \cdot 0.03 = 0.04$

b) $P(H \mid A) = \dfrac{P(H \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(H) \cdot P(A \mid H)}{P(A)}$
$= \dfrac{2/3 \cdot 0.03}{0.04} = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza $(159; 165)$. Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.*

b) *(1 punto) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrido (km)”} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 16)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 16) \xrightarrow{n=81} I.C. = (159; 165)$

$$\overline{x} = \frac{159 + 165}{2} = 162$$

$$E = \frac{165 - 159}{2} = 3 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 3 \implies z_{\alpha/2} = 1.6875$$

$$z_{\alpha/2} = 1.69 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9545 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0455 \Rightarrow \alpha = 0.091 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.909}$$

b) $X : \mathcal{N}(160, 16) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(160, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) = \mathcal{N}(160, 2)$

$$P(\overline{X} > 156) = P\left(Z > \frac{156 - 160}{2}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$