MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU SEPTIEMBRE 2015

- Extraordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Septiembre 2015 (coincidentes)

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

b) (1 punto) Determínese la matriz X *tal que* $B \cdot A \cdot X = C$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |C^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{9}$

b) $B \cdot A \cdot X = C \implies \underbrace{(B \cdot A)^{-1} \cdot B \cdot A}_{I} \cdot X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C \implies X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 5 & 19 \end{pmatrix} \implies (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (B \cdot A)^{-1} \cdot C = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 69 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S *la región del plano definida por:*

$$y + 2x \geq 7 \quad \& \quad y - 2x \geq -1 \quad \& \quad y \leq 5$$

a) (1 punto) Represéntese la región S *y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) (1 punto) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -5x - 5y$ *en la región* S *indicando los puntos de* S *en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; y + 2x \geq 7 & \to (0,7) \quad \& \quad (3.5, 0) \\ ② \; y - 2x \geq -1 & \to (0,-1) \quad \& \quad (0.5, 0) \\ ③ \; y \leq 5 & \to (0,5) \end{cases}$$

- `Función objetivo`

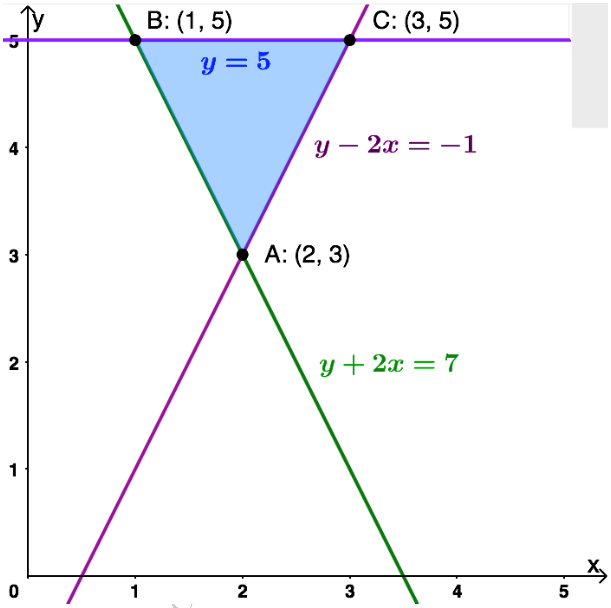
$$f(x,y) = -5x - 5y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	2	3	-25
B	1	5	-30
C	3	5	-40

El *mínimo* de $f(x,y)$ es de -40 y se produce en el punto $C:(3,5)$.
El *máximo* de $f(x,y)$ es de -25 y se produce en el punto $A:(2,3)$.



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Se considera la función real de variable real $f(x) = e^{x^2}$.*
>
> *a) (1 punto) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
>
> *b) (1 punto) Determínense sus intervalos de concavidad y convexidad.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 2x = 0 \implies x = 0 \\ e^{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 0)$ y *creciente* en $(0, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 1)$.

b) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} = (4x^2 + 2) \cdot e^{x^2} = 0 \implies \begin{cases} 4x^2 + 2 = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \\ e^{x^2} = 0 \implies \nexists \text{ Solución} \end{cases}$

$f''(x) = (4x^2 + 2) \cdot e^{x^2} > 0$, por lo que $f(x)$ es *convexa* ($\cup$) en su dominio ($\mathbb{R}$).

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Todos los estudiantes de una facultad de Madrid afirman haber comido en el último mes en alguna de las dos cafeterías de esa facultad, la grande y la pequeña. Un $60\,\%$ *declara haber comido en la grande mientras que un* $55\,\%$ *declara haber comido en la pequeña. Calcúlese la probabilidad de que un estudiante de dicha facultad elegido al azar:*

a) (1 punto) Haya comido en el último mes en la cafetería grande y en la pequeña.

b) (1 punto) Haya comido en el último mes en la cafetería pequeña si se sabe que nunca ha comido en la grande.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$G \equiv \text{“El estudiante ha comido en la cafetería grande en el último mes”}$$
$$P \equiv \text{“El estudiante ha comido en la cafetería pequeña en el último mes”}$$

$$P(G) = 0.6 \qquad \& \qquad P(P) = 0.55 \qquad \& \qquad P(G \cup P) = 1$$

a) $P(G \cap P) = P(G) + P(P) - P(G \cup P) = 0.6 + 0.55 - 1 = 0.15$

b) $P(P \mid \overline{G}) = \dfrac{P(P \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(P) - P(P \cap G)}{1 - P(G)} = \dfrac{0.55 - 0.15}{1 - 0.6} = 1$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 kg/ha.

a) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917.75; 10082.25)$ como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

b) (1 punto) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo 50 kg/ha.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Producción del olivar } (kg/ha)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 1000)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1000) \xrightarrow{n=400} I.C.(\mu) = (9917.75; 10082.25)$

$$\overline{x} = \frac{9917.75 + 10082.25}{2} = 10000$$

$$E = \frac{10082.25 - 9917.75}{2} = 82.25 \implies E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = E \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 82.25 \cdot \frac{\sqrt{400}}{1000}$$

$$z_{\alpha/2} = 1.645 \overset{Tabla}{\Longrightarrow} 1 - \alpha/2 = 0.95 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies \alpha = 0.1 \implies \boxed{1 - \alpha = 0.9}$$

b) $n = ? \quad \& \quad 2E \leq 50 \quad \& \quad 1 - \alpha = 0.98$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$2E = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.325 \cdot \frac{1000}{\sqrt{n}} \leq 50 \implies n \geq \left(2 \cdot 2.325 \cdot \frac{1000}{50}\right)^2 = 8649$$

$$\implies \boxed{n = 8649}$$

Septiembre 2015 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+5y-z=3 \\ x+3y-2z=a \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a-1=0 \implies a=1$$

- Si $a \neq 1 \implies \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ Solución).
- Si $a = 1 \implies \text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solo es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot(-1+3\lambda) + \lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 3\lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 4 - 7\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & si\ x \leq 0 \\ \ln(x+1) + m & si\ x > 0 \end{cases}$$

Nota: ln *denota el logaritmo neperiano.*

a) (1 punto) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

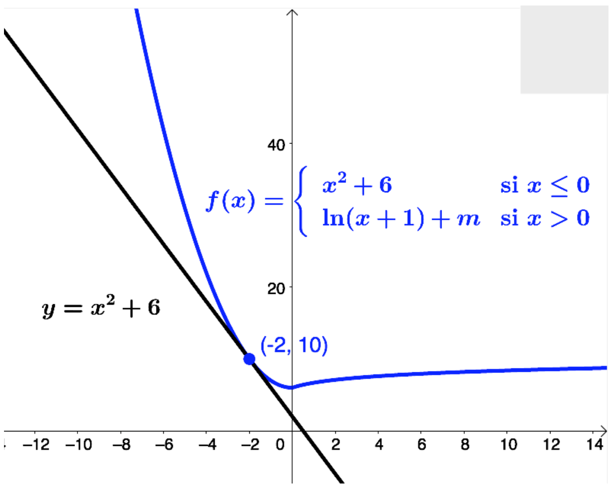
a) Continuidad en $x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+6) = 6$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+1)+m] = m$
- $f(0) = 0^2 + 6 = 6$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \implies \boxed{m = 6}$

b) Hallamos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$, teniendo en cuenta que en ese punto la función viene definida por $f(x) = x^2 + 6$.

$$x_0 = -2 \implies y_0 = f(x_0) = f(-2) = 10$$
$$\implies (x_0, y_0) = (-2, 10)$$
$$f'(x) = 2x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(-2) = -4$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y - 10 = -4 \cdot (x+2)$$
$$r \equiv y = -4x + 2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real $f(x) = (2x+3)^5 + e^{2x}$

a) (1 punto) Cacúlese su función derivada.

b) (1 punto) Calcúlese $\int f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x) = 5\cdot(2x+3)^4\cdot 2 + 2e^{2x} = 10\cdot(2x+3)^4 + 2e^{2x}$

b) $\int f(x)\,dx = \int \left((2x+3)^5 + e^{2x}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\int \underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{(2x+3)^5}_{u^5}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\int \underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{e^u}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2x+3)^6 + \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C = \frac{1}{12}\cdot\left[(2x+3)^6 + 6e^{2x}\right] + C$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) (1 punto) Sea funcionario y hombre.

b) (1 punto) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$F \equiv \text{“El miembro del profesorado es funcionario”}$$
$$M \equiv \text{“El miembro del profesorado es mujer”}$$

1ª FORMA: TABLA DE CONTINGENCIA

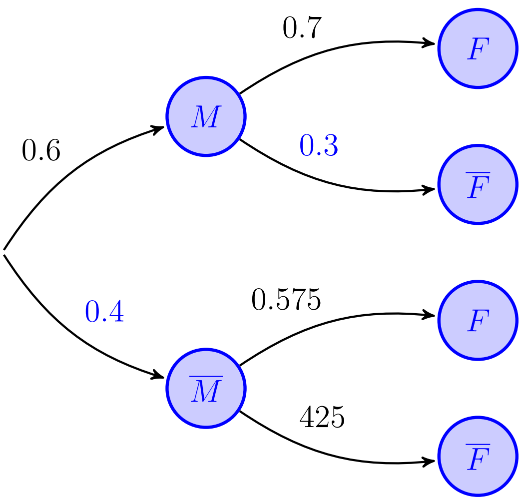
$$P(F \mid M) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} \implies P(F\cap M) = P(M)\cdot P(F\mid M) = 0.6\cdot 0.7 = 0.42$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	0.42	0.18	0.6
$\overline{M}$	0.23	0.17	0.4
Total	0.65	0.35	1

a) $P(F\cap\overline{M}) = 0.23$

b) $P(M\mid\overline{F}) = \dfrac{P(M\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0.18}{0.35} = 0.514$

2ª Forma: Diagrama de Arbol



$$
\begin{aligned}
P(F) &= P\Big((M\cap F)\cup(\overline{M}\cap F)\Big)\\
&= P(M\cap F) + P(\overline{M}\cap F)\\
&= P(M)\cdot P(F\mid M) + P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M})\\
\Longrightarrow\ & 0.65 = 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot P(F\mid \overline{M})\\
\Longrightarrow\ & P(F\mid \overline{M}) = 0.575
\end{aligned}
$$

a) $P(F\cap \overline{M}) = P(\overline{M})\cdot P(F\mid \overline{M})$

$$= 0.4\cdot 0.575 = 0.23$$

b) $P(M\mid \overline{F}) = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(M\cap \overline{F})}{1-P(F)}$

$$= \frac{0.6\cdot 0.3}{1-0.7} = 0.514$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) (1 punto) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) (1 punto) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o iggual que 2625 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de patatas (gr)”} \longrightarrow \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X:\mathcal{N}(\mu,10) \xrightarrow{n=50} \overline{x} = 100$

$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{\textit{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$

$E = z_{\alpha/2}\cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645\cdot \dfrac{10}{\sqrt{50}} = 2.326$

$I.C._{90\,\%}(\mu) = (\overline{x}-E;\overline{x}+E) \implies \boxed{I.C._{90\,\%}(\mu) = (97.674; 102.326)}$

b) $X:\mathcal{N}(10,100) \xrightarrow{n=25} \overline{X}:\mathcal{N}\left(10, \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2\right) \quad \& \quad \overline{X} = \dfrac{2625}{25} = 105$

$\left(\overline{X}\le 105\right) = P\left(Z \le \dfrac{105-100}{2}\right) = P(Z\le 2.5) = 0.9938$