MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2015

- Ordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2015
Opción A (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+wz=1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discútase para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.*

b) *(1 punto) Resuélvase para $a=1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - 3a + 2 = 0 \implies a = \{1, 2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 3 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{Sist. Incompatible (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión del sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + \lambda + 0 = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \lambda & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

a) (1 punto) Calcúlese el valor del parámetro real a, sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) (1 punto) Para a=1 calcúlese $\int_{-1}^{0} (x - 1) \cdot f(x)\, dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Si la función $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -1 \implies f'(-1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2 + a)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - a}{(x-1)^2}$$

$$\implies f'(-1) = 0 \implies \frac{3 - a}{4} = 0 \implies \boxed{a = 3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = \{-1, 3\}$$

Por lo tanto hay un *máximo relativo* en $x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) Para $a=1$

$$\int_{-1}^{0}(x-1)\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\cancel{(x-1)}\cdot\frac{x^2+1}{\cancel{x-1}}\,dx=\int_{0}^{-1}(x^2+1)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^{-1}$$

$$=(0)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se sabe que la derivada de cierta función real de variable real f es

$$f'(x)=x^2\cdot(x^2-2x-15)$$

a) (1 punto) Determínese los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Determínense los extremos relativos de f, indicando si se trata de máximos o mínimos relativos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $f'(x)=x^2\cdot(x^2-2x-15)=0 \implies x=\{-3,0,5\}$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,5)$	$(5,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en el intervalo $(-3,5)$ y *creciente* en $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $x=-3$ y un *mínimo relativo* en $x=5$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) (1 punto) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

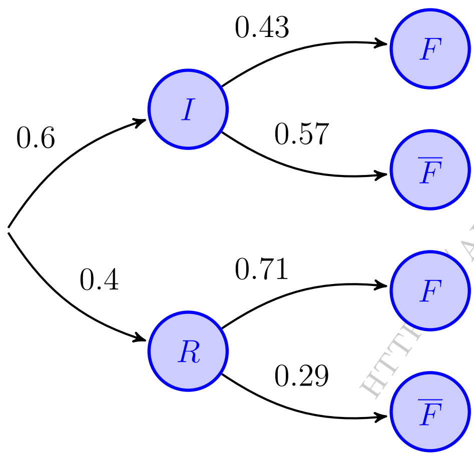
b) (1 punto) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$I \equiv \text{“El paciente es tratado con interferón”}$$
$$R \equiv \text{“El paciente es tratado con ribavirina más interferón”}$$
$$F \equiv \text{“El tratameinto tiene resultados favorables”}$$



a) $$P(F) = P\big((I \cap F) \cup (R \cap F)\big)$$
$$= P(I \cap F) + P(R \cap F)$$
$$= P(I) \cdot P(F \mid I) + P(R) \cdot P(F \mid R)$$
$$= 0.6 \cdot 0.43 + 0.4 \cdot 0.71 = 0.542$$

b) $$P(I \mid F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{P(I) \cdot P(F \mid I)}{P(F)}$$
$$= \frac{0.6 \cdot 0.43}{0.542} = 0.476$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) *(1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.*

b) *(1 punto) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Consumo de agua } (\ell)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=25} \overline{x} = 100$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} = 3.92$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (96.08; 103.92)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 2 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 2 \implies n > \left(2.575 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 165.77 \implies \boxed{n = 166}$$

Junio 2015
Opción B (Coincidentes)

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determínense los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) (1 punto) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a+4 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2a^2 - 2a - 4 = 0 \implies a = \{-1, 2\} \implies \exists\, (A \cdot B)^{-1} \;\forall\, a \neq \{-1, 2\}$$

b) Para $a = 1 \quad A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ & $|A \cdot B| = -4$ & $(A{\cdot}B)^{-1} = -\frac{1}{4} {\cdot} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \underbrace{(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B)}_{I} \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del $5\,\%$ de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del $2\,\%$ anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6000 euros como máximo.
Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } A \text{ (euros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad invertida en el producto } B \text{ (euros)”}$$

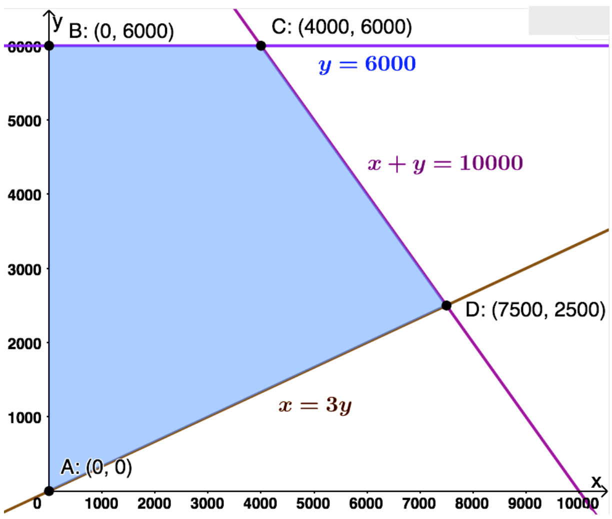
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x+y \leq 10000 & \rightarrow (0,10000) \quad \& \quad (10000,0) \\ ② \; x \leq 3y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (3000,9000) \\ ③ \; y \leq 6000 & \rightarrow (0,6000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 0.05x + 0.02y$$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	0	6000	120
C	4000	6000	320
D	7500	2500	425

El *máximo beneficio* es de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 en el producto B.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ x^2 + a & si\ 0 < x < 2 \\ bx + 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determínense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.

b) (1 punto) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)

- Si $x < 0,\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, luego continua en $x < 0$
- Si $0 < x < 2,\ f(x) = x^2 + a$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 2,\ f(x) = bx + 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + a) = a$
  - $f(0) = 0^2 + a = a$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$

  $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

  $$\boxed{a = -1}$$

- Si $x = 2$

  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + a) = 4 + a$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (bx + 1) = 2b + 1$
  - $f(2) = 2b + 1$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$

  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

  $$4 + a = 2b + 1 \implies 4 - 1 = 2b + 1$$

  $$\boxed{b = 1}$$

b) En $x = -1$ la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = 0$$

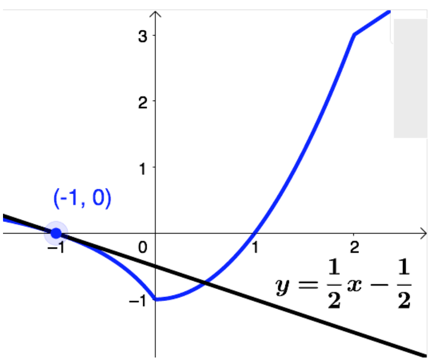
$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-1) = -1/2$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)$$

$$r \equiv y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que

$$P(A) = 0.8 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.8 \quad \& \quad P(A \cup B) = 0.9$$

a) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) (1 punto) Calcúlese $P(B \mid \overline{A})$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.8 \implies P(A \cap B) = 0.2$

$\underbrace{P(A \cup B)}_{0.9} = \underbrace{P(A)}_{0.8} + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0.2} \implies P(B) = 0.9 + 0.2 - 0.8 = 0.3$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.3 = 0.24 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}\right.$$

b) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.3 - 0.2}{1 - 0.8} = 0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20\ mg/dl$.

a) (1 punto) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191.2; 210.8)$, expresado en mg/dl, para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2015 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Nivel de colesterol } (mg/ml)\text{”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 20)$$

a) $I.C._{95\,\%}(\mu) = (191.2; 210.8) \implies \overline{x} = \dfrac{191.2 + 210.8}{2} = 201$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = \frac{210.8 - 191.2}{2} = 9.8 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \implies \boxed{n = 16}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=100}$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies \alpha/2 = 0.01 \implies 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$2E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.325 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \implies \boxed{2E = 9.3}$$