MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JUNIO 2019

- Ordinario -

(Coincidentes)

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Junio 2019 (coincidentes)

Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

La aerolínea Air, para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0.25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2.25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Nº de billetes vendidos de la clase (P)"}$$
$$y \equiv \text{"Nº de billetes vendidos de la clase (T)"}$$
$$z \equiv \text{"Nº de billetes vendidos de la clase (E)"}$$

a) Número de plazas vendidas $= 0.9 \cdot (12 + 36 + 72) = 108$

b) Escribimos el sistema de ecuaciones teniendo en cuenta que se han vendido 108 plazas, que la recaudación ha sido de 13800€ y que se han vendido el triple de (T) que de (P).

$$\begin{cases} x + y + z = 108 \\ 250x + 150y + 100z = 13800 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 250 & 150 & 100 & 13800 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \frac{1}{50}F_2 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \\ 0 & 0 & 3 & 204 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 30 + 68 = 108 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 3 \cdot 68 = -264 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = 204 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 68 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ *en* $x = 1$.

b) (0.75 puntos) Determinar, si existe, $f'(1)$.

c) (1 punto) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Continuidad de $f(x)$ en $x = 1$

- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$
- $f(1) = 2$

Por lo que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

b) Para calcular el valor de la derivada de una función a trozos en la frontera tenemos que hacerlo por la definición de derivada en un punto:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 2}{h}$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi(1+h)^2}{2}\right) - 2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2\pi(1+h)\cos\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right) = 0$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{1}+h-\cancel{1}}{\sqrt{1+h}-1} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 2 - 2\sqrt{1+h}}{h\cdot\left(\sqrt{1+h}-1\right)}$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1+h}}}{\left(\sqrt{1+h}-1\right) + h\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+h}}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}+1}{1+h-\sqrt{1+h}+\frac{h}{2}}$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+h}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{1+h}} + \frac{1}{2}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Como $\displaystyle\lim_{h\to 1^-} f'(x) \neq \lim_{h\to 1^+} f'(x) \implies \nexists\, f'(1)$

Otra opción es la siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2\pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1 - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1) - (x-1)}{2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = 0 \\
f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)-(x-1)}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^2} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}\cdot[2\sqrt{x}-(\sqrt{x}+1)]}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{2\sqrt{x}\cdot\cancel{(\sqrt{x}-1)}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \implies \nexists f'(1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x f_1(x)\,dx$, por tanto:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x f(x)\,dx &= \int_0^1 2x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)dx = 2\frac{1}{\pi}\int_0^1 \pi x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\Bigg]_0^1 \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\left(\cancelto{0}{\cos(\pi/2)} - \cancelto{1}{\cos(0)}\right) = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$, se pide:*
>
> *a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$ y cuya tercera coordenada sea negativa.*
>
> *b) (0.5 puntos) Calcular un vector $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$ y tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.*
>
> *c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5, 1, -1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

a) El vector $\vec{a}$ buscado ha de ser proporcional a $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$,

luego será de la forma $\vec{a} = \lambda(1, -1, 1)$.
Cómo el módulo $|\vec{a}| = \sqrt{3}/2$ tenemos que:

$$|\vec{a}| = |\lambda|\cancel{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \implies |\lambda| = \frac{1}{2} \xrightarrow{3^a \text{ comp. negativa}} \lambda = -\frac{1}{2} \implies \vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

b) Como $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces será de la forma $\vec{u} = (\lambda, \mu, \lambda)$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda - \mu \neq 0 \implies \mu \neq 2\lambda$$

Cualquier vector que cumpla lo expuesto nos valdría, por ejemplo $\boxed{\vec{u} = (1, 0, 1)}$

c) El plano π, que contiene a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y pasa por el origen será:

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ \vec{w} = (1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv x + y + z = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} P(5, 1, -1) \\ t \perp \pi \implies \vec{d_t} = \vec{n}_\pi = (1, -1, 1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$P' = t \cap \pi \implies (5 + \lambda) - (1 - \lambda) + (-1 + \lambda) = 0 \implies \lambda = -1 \implies \boxed{P'(4, 2, -2)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dados dos sucesos aleatorios A y B, con probabilidades respectivas $P(A) = 0.4$ y $P(B) = 0.5$, se denota por $\overline{A}$ y $\overline{B}$ a los sucesos complementarios de A y B. Se pide:

a) (1 punto) Suponiendo que A y B son independientes, calcular $P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\Big)$.

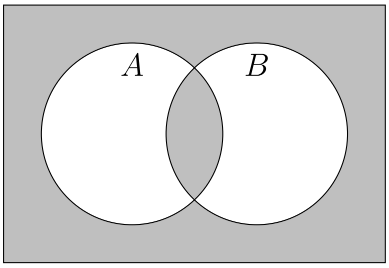
b) (1 punto) Suponiendo que A y B son incompatibles, hallar $P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\Big)$.

c) (0.5 puntos) Si $P(A \cup B) = 0.9$, ¿son A y B independientes?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



$$
\begin{aligned}
&P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\Big) \\
&= P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})\Big) \\
&= P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) - \cancelto{0}{P(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B})} \\
&= P(A \cap B) + 1 - P(A \cup B) \\
&= P(A \cap B) + 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
&= 1 + 2P(A \cap B) - P(A) - P(B) \\
&= 1 + 2P(A) \cdot P(B) - P(A) - P(B) \\
&= 1 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.5 - 0.4 - 0.5 = 0.5
\end{aligned}
$$

b) Si A y B son incompatibles $P(A \cap B) = 0 \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$$
\begin{aligned}
P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\Big) &= P\Big((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})\Big) \\
&= \cancelto{0}{P(A \cap B)} + P(\overline{A \cup B}) - \cancelto{0}{P(A \cap B) \cap (\overline{A \cup B})} \\
&= 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) \\
&= 1 - (0.4 + 0.5) = 0.1
\end{aligned}
$$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\implies P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.9 = 0$
$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2 \implies A$ y B no son sucesos independientes.

Junio 2019 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ *para los cuales* B *no tiene inversa.*

b) (1 punto) Para $m = 1$, *calcular la inversa de la matriz* B.

c) (1 punto) Para $m = 2$, *calcular la matriz producto* $A^\top B$ *(donde* $A^\top$*) denota la matriz traspuesta de* A*) y el determinante de la matriz* $A^2 B$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $|B| = 4 \cdot (2 - m^2) = 0 \implies m = \pm\sqrt{2}$. Luego la matriz B carece de inversa para los valores de $m = \pm\sqrt{2}$.

b) Para $m = 1$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $|B| = 4 \cdot (2 - 1^2) = 4$

$$\text{Adj}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj}B^\top = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 & -1 \\ 1/4 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $m = 2$ la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $|B| = 4 \cdot (2 - 2^2) = -8$ y $|A| = 2$.

$$A^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^2 B\right| = \left|A^2\right| \cdot |B| = |A|^2 \cdot |B| = 2^2 \cdot (-8) = -32$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2\cdot(x-1)}$, *se pide:*

a) (1.25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ *y estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de* $f(x)$.

b) (1.25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ *y la recta* $2x + 4y = 7$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)
- A. VERTICAL. La buscamos en $2\cdot(x-1) = 0 \implies x = 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\cdot(x-1)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- A. HORIZONTAL en $y = 0 \implies \nexists$ A. OBLÍCUA

$$y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\cdot(x-1)} = 0$$

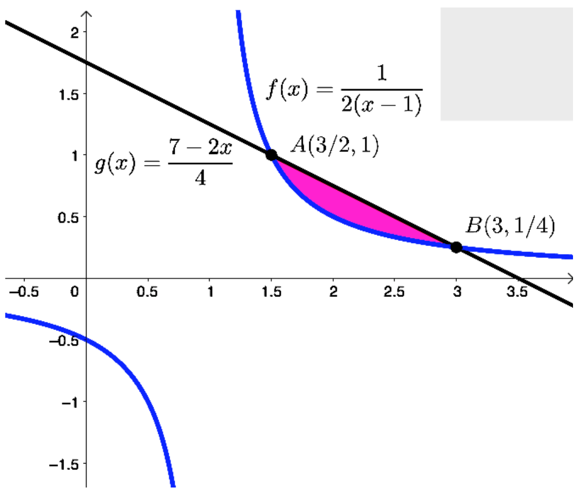
Para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento hallamos los puntos singulares: $f'(x) = \frac{-1}{2\cdot(x+1)^2} < 0\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, luego la función $f(x)$ es *decreciente* en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{2\cdot(x-1)}$ & $g(x) = \frac{7-2x}{4}$, la recta dada. Creamos la función $h(x) = f(x) - g(x)$ y calculamos los puntos de corte con el eje OX.

$$h(x) = \frac{1}{2\cdot(x-1)} - \frac{7-2x}{4} = \frac{2x^2-9x+9}{4\cdot(x-1)} = 0 \Rightarrow 2x^2-9x+9 = 0 \implies x = \{3/2, 3\}$$

Lo que crea un único recinto de integración $A_1 = (3/2, 3)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{3/2}^{3} h(x)\,dx = \int_{3/2}^{3}(f(x)-g(x))\,dx \\ &= \int_{3/2}^{3}\left(\frac{1}{2\cdot(x-1)} - \frac{7-2x}{4}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\ln|x-1| - \frac{7x-x^2}{4}\Bigg]_{3/2}^{3} \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot\ln|3-1| - \frac{7\cdot 3 - 3^2}{4}\right) \\ &- \left(\frac{1}{2}\cdot\ln|3/2-1| - \frac{7\cdot 3/2 - (3/2)^2}{4}\right) \\ &= \left(\ln\sqrt{2} - 3\right) - \left(-\ln\sqrt{2} - \frac{33}{16}\right) \\ &= \ln 2 - \frac{15}{16} = -0.2443 \end{aligned}$$



$$Area = |A_1| = \left|\ln 2 - \frac{15}{16}\right| = \frac{15}{16} - \ln 2 = 0.2443\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$ *, y* $s \equiv \begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$ *, se pide:*

a) (1.25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

b) (1.25 puntos) Dado el punto $P(5, 0, 1)$*, de la recta* r*, obtener un punto* Q*, de la recta* s*, de modo que el triángulo* OPQ *sea rectángulo, con ángulo recto en* $O(0, 0, 0)$*, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para obtener las ecuaciones paramétricas podemos hallar el vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales a los planos que la definen, pero resulta más fácil intentar despejar dos variables en función de la tercera, a la que daremos el valor del parámetro λ. De esta forma:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + y \\ z = 1 - y \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - z \\ y = 4 - z \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} R(5, 0, 1) \\ \vec{d_r} = (1, 1, -1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(3, 4, 0) \\ \vec{d_s} = (-1, -1, 1) \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (-2, 4, -1)$$

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies r \text{ y } s \text{ están en el mismo plano.}$$

Como $5 \neq 3 - 1 \implies R \notin s$, luego r y s son paralelas.

b) Como $Q \in s$, será de la forma $Q(3 - \lambda, 4 - \lambda, \lambda)$. Como en el triángulo $\overset{\triangle}{OPQ}$, los lados $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ forman 90°, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ serán perpendiculares.

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \implies \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 5 \cdot (3 - \lambda) + 0 \cdot (4 - \lambda) + 1 \cdot (\lambda) = 0 \implies \lambda = \dfrac{15}{4}$

Por lo tanto $Q(-3/4, 1/4, 15/4)$ y los lados $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{PQ}$ miden:

$$\overline{OP} = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{26}\ u \quad \& \quad \overline{OQ} = \left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{235}\ u \quad \& \quad \overline{PQ} = \frac{1}{4}\sqrt{651}\ u$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2 % de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos exactamente 2 envíos.

b) (0.5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

c) (1.5 puntos) Usando la aproximación por la normal adecuada, hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) El número de envíos dañados es una binomial $X : \mathcal{B}(10, 0.02)$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.02^2 \cdot 0.98^8 = 0.0153$$

b)
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.02^1 \cdot 0.98^9\right] \\ &= 1 - (0.8171 + 01667) = 0.0162 \end{aligned}$$

c) Analizamos si se puede aproximar la distribución binomial a una normal.

$$X : \mathcal{B}(2000, 0.02) \begin{cases} n > 10 \\ np = 2000 \cdot 0.02 = 40 > 5 \\ nq = 2000 \cdot 0.98 = 1840 > 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{Yates}} Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(40, 6.26)$$

$$\begin{aligned} P(X = 30) &= P(29.5 < Y < 30.5) = P\left(\frac{29.5 - 40}{6.26} < Z < \frac{30.5 - 40}{6.26}\right) \\ &= P(-1.68 < Z < -1.52) = P(Z < -1.52) - P(Z < -1.68) \\ &= P(Z > 1.52) - P(Z > 1.68) = 1 - P(Z < 1.52) - [1 - P(Z < 1.68)] \\ &= P(Z < 1.68) - P(Z < 1.52) = 0.9535 - 0.9357 = 0.0178 \end{aligned}$$