MATEMATICAS II
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraordinario -

https://aprendeconmigomelon.com
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{“El libro es un ensayo”}$$
$$y \equiv \text{“El libro es una novela”}$$
$$z \equiv \text{“El libro es una biografía”}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{16} \cdot (x+y+z) \\ z + \dfrac{x}{3} = 2 + y \\ x + y + z - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5}\right) = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 3y - 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 3z = 6 \\ 13x - 3y - 3z = 0 \\ 5x + 8y + 10z = 1050 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 6 \\ 13 & -3 & -3 & 0 \\ 5 & 8 & 10 & 1050 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 13F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 36 & -42 & -78 \\ 0 & 23 & -5 & 1020 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 36F_3 - 23F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 36 & -42 & -78 \\ 0 & 0 & -786 & -38514 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x - 3 \cdot 55 + 3 \cdot 49 = 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow 36y - 42 \cdot 49 = -78 \Rightarrow \\ \Rightarrow -786z = -38514 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 24 \\ y = 55 \\ z = 49 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x} & si\ x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, luego solo habrá que estudiar la continuidad en la frontera $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2-4x+3) = 3 \\ \bullet\ f(0) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \\ f(x) \text{ tiene una discontinuidad} \\ \text{de salto infinito en } x = 0 \end{array}\right.$$

b) Como $f(x)$ no es continua en $x = 0$, tampoco es derivable en ese punto.

c)
- `A. Vertical` Como hemos visto en el apartado *a*), la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- `A. Horizontal`

  $$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+1}{-x} = 2 \Rightarrow \exists \underset{x\to-\infty}{A.H.} \text{ en } y = 2$$

  $$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 4x + 3\right) = +\infty \Rightarrow \nexists \underset{x\to+\infty}{A.H.}$$

d) Cuando $x \in (0, \infty)$, la función $f(x) = x^2 - 4x + 3 \implies f'(x) = 2x - 4 = 0 \implies x = 2$

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(2, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 2)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(2, -1)$.

La recta tangente a la gráfica de la función cuya pendiente es nula será por tanto $y = -1$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0. -1, 0)$ y $B(0.1, 0)$ pertenecientes al plano π.

a) *(1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos del cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.*

b) *(1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, encuentre los otros dos vértices del mismo.*

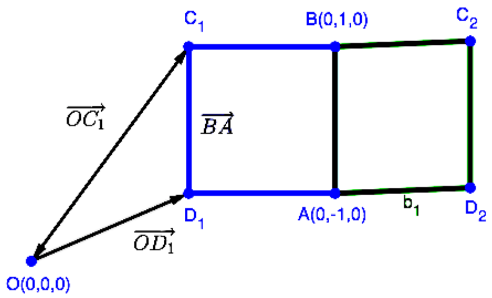
(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

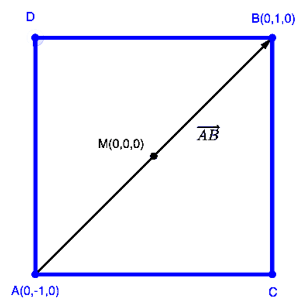
a) Sea $C(a, b, a)$ un punto genérico del plano π. Así: $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (a, b-1, a)$. Para que C pertenezca al cuadrado:

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \implies (0, 2, 0) \cdot (a, b-1, a) = 2b - 2 = 0 \implies b = 1$
- $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \implies \sqrt{4} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2 + a^2} \xRightarrow{b=1} 2 = \sqrt{2a^2}$

$$\implies a = \pm\sqrt{2} \implies \begin{cases} C_1(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \xRightarrow{\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{BA}} D_1(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}) \\ C_2(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \xRightarrow{\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{BA}} D_2(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \end{cases}$$



(a) Apartado a)



(b) Apartado b)

b) Sea $M = \dfrac{(0, -1, 0) + (0, 1, 0)}{2} = (0, 0, 0)$ el punto medio de la diagonal $\overline{AB}$.
Los puntos C y D son dos puntos pertenecientes a π, es decir, de la forma (a, b, a) de forma que:

- $d(M, A) = d(M, C) \implies \sqrt{0 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2} \implies 2a^2 + b^2 = 1$
- C y D pertenecen a un plano $\pi' \perp \overrightarrow{AB}$, que pasa por M.

$$\pi' \equiv \begin{cases} M(0, 0, 0) \\ \vec{n}_{\pi'} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) \simeq (0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi \equiv y + D = 0 \xRightarrow{D=0} \pi' \equiv y = 0$$

$$C, D, \in \pi' \implies b = 0 \xRightarrow{2a^2+b^2=1} 2a^2 = 1 \implies \begin{cases} a = -\sqrt{2}/2 \implies C(-\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ a = \sqrt{2}/2 \implies D(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II*. Se eligen* 6 *alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:*

a) *(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en* Matemáticas II.

b) *(0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en* Matemátcas II.

c) *(1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato* 120 *alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de* 60 *de estos alumnos estén matriculados en* Matemáticas II.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A - Extraordinario)

Solución.

$X \equiv$ "Nº de alumnos matriculados en Matemáticas II" $\Longrightarrow X : \mathcal{B}(6, 3/5) = \mathcal{B}(6, 0.6)$

a) $P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^2 = 0.311$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^6 = 0.9959$

c) $X : \mathcal{B}(120, 0.6) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 120 > 10 \checkmark \\ np = 72 > 5 \checkmark \\ nq = 48 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \Longrightarrow Y : \mathcal{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathcal{N}(72, 5.37)$

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P(Y \geq 60.5) = P\left(Z \geq \frac{60.5 - 72}{5.37}\right) = P(Z \geq -2.14) \\ &= P(Z \leq 2.14) = 0.9838 \end{aligned}$$

Julio 2022 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$*

b) *(1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.*

c) *(0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |AB| = k^2 - 3k = 0$

$\Longrightarrow k = \{0, 3\}$, luego $\exists (AB)^{-1}\ \forall x \neq \{0, 3\}$

Si $k = 1 \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ & $|AB| = -2$

$\Longrightarrow (AB)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$

$|BA| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(BA) < 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & k-1 \\ -2 & k+1 \end{vmatrix} = 2k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \\ \begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = k + 1 = 0 \Longrightarrow k = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Y como k no puede valer al mismo tiempo 1 y -1 $\Longrightarrow ran(BA) = 2\ \forall k \in \mathbb{R}$

c) Tenemos que encontrar un sistema $A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right)$, del que sabemos que $\text{ran}(A) = 2$ y que para ser incompatible $\text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} \neq 0$, por ejemplo $a = 0$, $b = 0$ y $c = 1$, con lo que el sistema queda:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \implies \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a)
- `Continuidad en` $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/\cancel{x}}{-1/x^{\cancel{2}}}$
    $\displaystyle= \lim_{x\to 0}(-x) = 0$
  - $f(0) = 0$

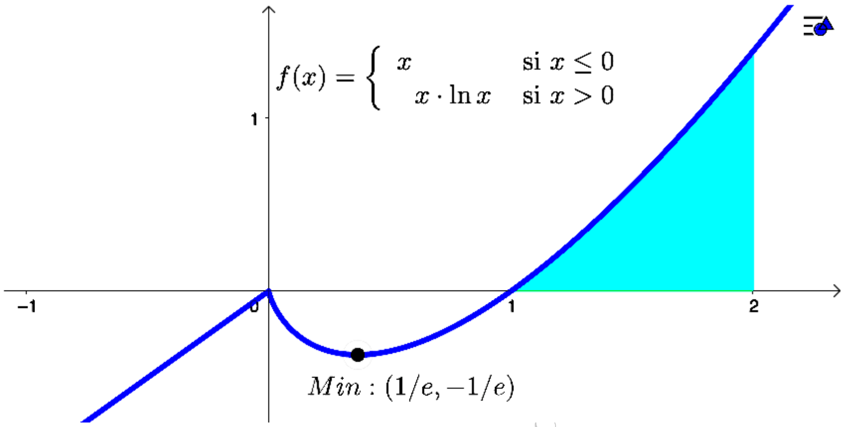
  Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.
- `Derivabilidad en` $x = 0$
  - $\displaystyle f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$
  - $\displaystyle f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0}(\ln x + 1) = -\infty$

  Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b)
- Si $x < 0$, $f(x) = x$ que es una recta, luego *creciente* en $(-\infty, 0)$.
- Si $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1 = 0 \implies \ln x = -1 \implies x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/e)$	$(1/e, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(0, 1/e)$ y *creciente* en $(1/e, +\infty)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(1/e, -1/e)$ y un *máximo relativo* en $(0, 0)$



c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x \cdot \ln x\,dx == \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx & \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \left.\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_1^2$

$$- \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \left.\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2 \cdot \ln 2 - 1) - \left(\frac{1}{2} \cdot \cancelto{0}{\ln 2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - \frac{3}{4} \simeq 0.6363$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \\ z=t \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

a) *(1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.*

b) *(0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.*

c) *(0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} R(-1,-1,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \\ z=t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \implies s \equiv \begin{cases} S(2,5,0) \\ \vec{d_s} = (-2,2,1) \end{cases}$$

a) $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s} \implies \begin{cases} r \equiv s \\ r \parallel s \end{cases} \xrightarrow{2+5+2 \neq 0} S \notin r \implies r \parallel s$

$$d(r,s) = d(R,s) = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \times \vec{d_s}\right|}{\left|\vec{d_s}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|(6,-3,18)|}{3} = \frac{3\sqrt{41}}{3} = \sqrt{41}\ u$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} R(-1,-1,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{RS} = (3,6,0) \simeq (1,2,0) \\ \vec{v} = \vec{d_r} = (-2,2,1) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0}$$

c) Los puntos P y Q pertenecientes a r y s respectivamente y que pertenecen a su vez al plano $z=0$ son $P(-1,-1,0)$ y $Q(2,5,0)$.

$$t \equiv \begin{cases} P(-1,-1,0) \\ Q(2,5,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(-1,-1,0) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{PQ} = (3,6,0) \simeq (1,2,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 0 \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

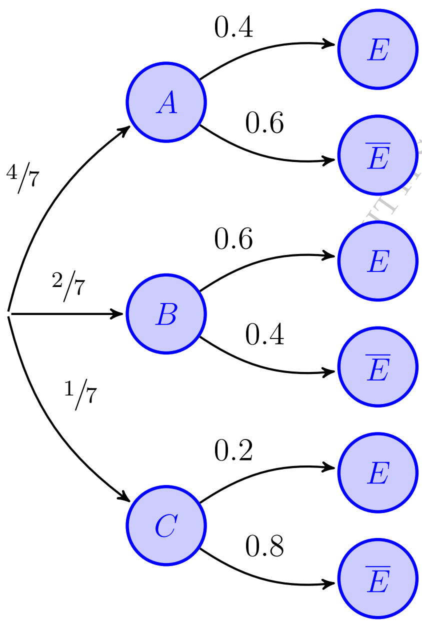
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B - Extraordinario)

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{“El producto es del tipo } A\text{”}$$
$$B \equiv \text{“El producto es del tipo } B\text{”}$$
$$C \equiv \text{“El producto es del tipo } C\text{”}$$
$$E \equiv \text{“El producto se dedica a la exportación”}$$



a) $P(E) = P\big((A\cap E)\cup(B\cap E)\cup(C\cap E)\big)$

$= P\big((A\cap E) + P(B\cap E) + P(C\cap E)\big)$

$= P(A)\cdot P(E \mid A) + P(B)\cdot P(E \mid B)$

$+ P(C)\cdot P(E \mid C) = \dfrac{4}{7}\cdot 0.4$

$\dfrac{2}{7}\cdot 0.6 + \dfrac{1}{7}\cdot 0.2 = 0.4286$

b) $P(C \mid E) = \dfrac{P(C\cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(C)\cdot P(E \mid C)}{P(E)}$

$= \dfrac{1/7 \cdot 0.2}{0.4286} = 0.0667$