MATEMATICAS II

EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022

- Extraord. (Coincidentes) -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^{\top}) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A- Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a \cdot (a^2 - b^2) \xrightarrow{b=a^2} \Longrightarrow |A| = a \cdot (a^2 - a^4) = a^3 \cdot (1 - a^2) = 0 \Longrightarrow a = \{-1, 0, 1\}$
$\Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

b) $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^{\top}) \cdot B = \cancel{A^{-1}B} + \underbrace{2A^{-1}A}_{2I} - \cancel{A^{-1}B} - B^{\top}B = 2I - B^{\top}B$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Para $b = 1$ tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

$|A + B| = (a-2) \cdot \left[(a-1)^2 - 1\right] = (a-2) \cdot (a^2 - 2a + 1 - 1) = a \cdot (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = \{0, 2\}$

- Si $a \neq \{0, 2\} \Longrightarrow |A + B| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A + B) = 3$
- Si $a = 0 \Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

  $|A + B| = 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A + B) < 3$, y como, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A + B) = 2$
- Si $a = 2 \Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{ran}(A + B) = 1$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$*. Se pide:*

a) *(1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en* $x = 1$ *y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de* $f(x)$ *en algún punto entre* $x = -3$ *y* $x = -2$*.*

b) *(1.25 puntos) Calcular* $\int x f(x)\, dx$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A- Coincidentes)

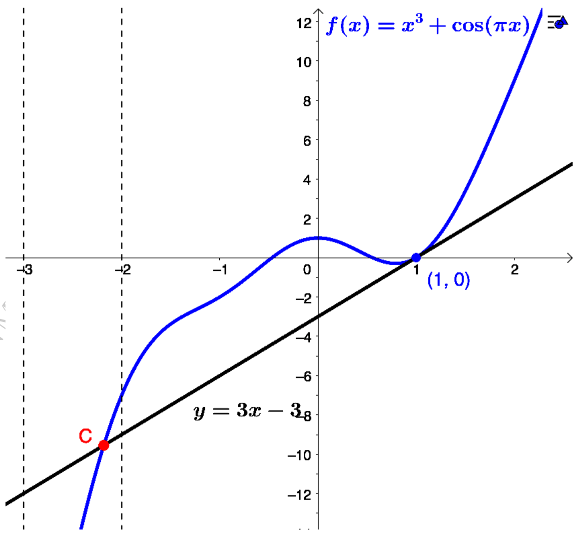
Solución.

a) Hallamos la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

$$\begin{aligned} x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 0 \\ \implies (x_0, y_0) = (1, 0) \\ f'(x) = 3x^2 - \pi \cdot \operatorname{sen} \pi x \\ m_r = f'(x_0) = f'(1) = 3 \\ r \equiv y - y_0 = m_r(x - x_0) \\ y - 0 = 3 \cdot (x - 1) \\ r \equiv y = 3x - 3 \end{aligned}$$

Llamamos $g(x) = 3x - 3$ a la recta y:

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) - g(x) &= x^3 + \cos(\pi x) - (3x - 3) \\ &= x^3 - 3x + 3 + \cos(\pi x) \end{aligned}$$



$$\left.\begin{array}{l} h(x) \text{ continua en } [-3, -2] \\ h(-3) = -16 < 0 \\ h(-2) = 2 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Teorema}}$$

$\exists c \in (-3, -2) \mid h(c) = 0 \implies f(c) - g(c) = 0$
$f(c) = g(c)$, luego la función $f(x)$ y la recta $g(x)$ se cortan en un punto $c \in (-3, -2)$

b)
$$\int x f(x)\, dx = \int x \cdot \left(x^3 + \cos(\pi x)\right) dx = \int x^4 + x \cdot \cos(\pi x)\, dx$$

$$= \underbrace{\int x^4\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int x \cdot \cos(\pi x)\, dx}_{I_2} \overset{(*)}{=} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \left[\pi x \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)\right] + C$$

$$(*)\ I_1 = \int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$I_2 = \int x \cdot \cos(\pi x)\, dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x)\, dx & \Rightarrow v = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) \end{array}\right\} = \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x)$$

$$- \int \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = \frac{x}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left[\pi x \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)\right] + C$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O(0.0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

a) *(0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.*

b) *(0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.*

c) *(1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción A- Coincidentes)

Solución.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (-1,0,3)$$

a) $$Area_{\underset{ABC}{\triangle}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{|(6,3,2)|}{2} = \frac{\sqrt{36+9+4}}{2} = 3.5\ u^2$$

b) $$Vol_{0ABC} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{|6|}{6} = 1\ u^3$$

c) $$\pi \equiv \begin{cases} A(1,0,0) \\ B(0,2,0) \\ C(0,0,3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(1,0,0) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$6(x-1)+3y+2z=0 \implies \pi \equiv 6x+3y+2z-6=0$$

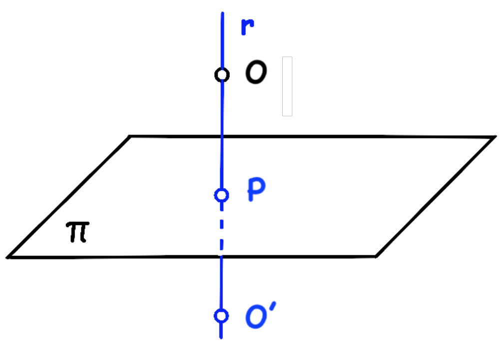
$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (6,3,2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Sea $P(6t,3t,2t)$ un punto de r tal que $P = r\cap\pi$

$$6\cdot 6t + 3\cdot 3t + 2\cdot 2t - 6 = 0 \xrightarrow{t=6/49} P\left(\tfrac{36}{49},\tfrac{18}{49},\tfrac{12}{49}\right)$$

$$P = M_{\overline{OO'}} = \frac{O+O'}{2} \implies O' = 2P - O$$

$$O' = 2\left(\tfrac{36}{49},\tfrac{18}{49},\tfrac{12}{49}\right) - (0,0,0) \Rightarrow O'\left(\tfrac{72}{49},\tfrac{36}{49},\tfrac{24}{49}\right)$$



Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar?

c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trajar un móvil.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2021 - Opción A- Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$M \equiv \text{“El individuo trabaja con el móvil”}$$
$$O \equiv \text{“El individuo trabaja con el ordenador”}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(M) = 0.6 \qquad \& \qquad P(O) = 0.3 \qquad \& \qquad P(\overline{M} \cap \overline{O}) = 0.25$$

a) $P(\overline{M} \cap \overline{O}) = P(\overline{M \cup O}) = 1 - P(M \cup O) = 0.25 \implies P(M \cup O) = 0.75$

$P(M \cap O) = P(M) + P(O) - P(M \cup O) = 0.6 + 0.3 - 0.75 = 0.15$

b)
- $P(M \cap O) = 0.15$
- $P(M) \cdot P(O) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$

$\implies \begin{cases} P(M \cap O) \neq P(M) \cdot P(O) \\ M \text{ y } O \text{ no son independientes} \end{cases}$

c) $P(\overline{M} \cap O) = P(O) - P(M \cap O) = 0.3 - 0.15 = 0.15$

d) $X \equiv$ “Nº de personas que trabajan con el móvil” $\implies X : \mathcal{B}(10, 0.6)$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 = 0.1209$$

Septiembre 2022 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B- Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{“Nº de asistentes de menos de 18 años”} \\ y &\equiv \text{“Nº de adultos de menos de 60 años”} \\ z &\equiv \text{“Nº de adultos mayores de 60 años”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$\begin{cases} y = x + z \\ x = 9z \\ 8x + 25y + 10z = 8300 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 9z = 0 \\ 8x + 25y + 10z = 8300 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 25 & 10 & 8300 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 8F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 33 & 2 & 8300 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 33F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 332 & 8300 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 250 + 25 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 10 \cdot 25 = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 332z = 8300 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 225 \\ y = 250 \\ z = 25 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ *y clasifique sus extremos relativos.*

c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. *Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *en el intervalo* $[0, 1]$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B- Coincidentes)

Solución.

a) $f(x) = xe^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$ y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$, luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = x \cdot e^x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

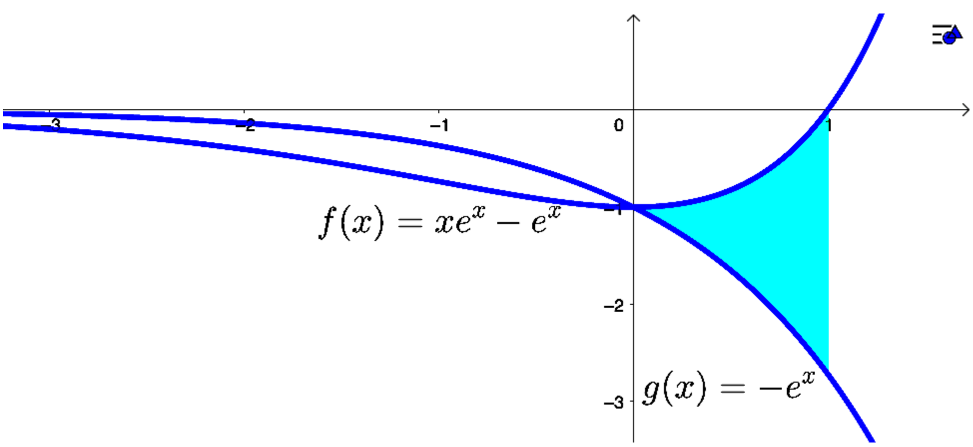
La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 0)$ y *creciente* en $(0, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, -1)$.

c) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = xe^x - \cancel{e^x} + \cancel{e^x} = xe^x = 0 \implies x = 0$, lo que define un único recinto de integración $A_1 : (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x\Big]_0^1 = 0 - (-1) = 1$$

$Area = |A_1| = |1| = 1\ u^2$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran la recta r y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \& \quad \pi_1 \equiv y + z = -1 \quad \& \quad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B- Coincidentes)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \implies r \equiv \begin{cases} R(2,0,2) \\ \vec{d_r} = (-1,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} y + z = -1 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} S(-1,0,-1) \\ \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,2,-2) \simeq (1,1,-1) \end{cases}$$

a) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \dfrac{|(0,1,1)\cdot(2,-1,1)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{|0-1+1|}{2\sqrt{3}} = 0 \implies \alpha = 90°$

b) $\dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \implies \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r$ y s se cortan o se cruzan.

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

c) Los puntos de r, son de la forma $(2-\lambda, 2\lambda, 2+\lambda)$, luego el punto de la recta r con segunda coordenada nula es $2\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies P(2,0,2)$.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(2,0,2) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_s} = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv x + y - z + D = 0 \xrightarrow[D=0]{P\in\pi} \boxed{\pi \equiv x + y - z = 0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sabiendo que

$$P(A \mid B) = \frac{1}{3} \quad \& \quad P(B \mid A) = \frac{1}{14} \quad \& \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{15}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ *y* $P(B)$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2022 - Opción B- Coincidentes)

Solución.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow P(B) = 3P(A \cap B)$

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{14} \Longrightarrow P(A) = 14P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \dfrac{7}{15} \Longrightarrow P(A \cup B) = \dfrac{8}{15}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \dfrac{8}{15} = 14P(A \cap B) + 3P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow \dfrac{8}{15} = 16P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{30}$ q.e.d.

b) $P(A) = 14P(A \cap B) = 14 \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{7}{15}$

$P(B) = 3P(A \cap B) = 3 \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{10}$