UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.

b) (1.25 puntos) Calcular $\displaystyle\int x\, f(x)\, dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$ y $C\,(0,0,3)$.

a) (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.

b) (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.

c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.

c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran la recta r y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad , \qquad \pi_1 \equiv y + z = -1, \qquad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3.$$

Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$, $P(B|A) = \dfrac{1}{14}$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{7}{15}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.