MATEMATICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXAMENES RESUELTOS

EVAU JULIO 2022
- Extraord. (Coincidentes) -

https://aprendeconmigomelon.com

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

Julio 2022 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) (1 punto) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)\cdot X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0 \implies a = \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0.2\}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$, y como $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de $(A-B)\cdot X = Y$

$$\begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies -a + 1 = 2 \implies \boxed{a = -1}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

La plataforma digital Plusfix *va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre* 600 *y* 900 *minutos, debe tener al menos* 200 *minutos de cine y como mucho* 500 *minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene* 15€ *de beneficio por cada minuto de emisión de cine y* 10€ *de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

- `Incógnitas` $x \equiv$ "Tiempo dedicado al cine (minutos)"
  $y \equiv$ "Tiempo dedicado al deporte (minutos)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

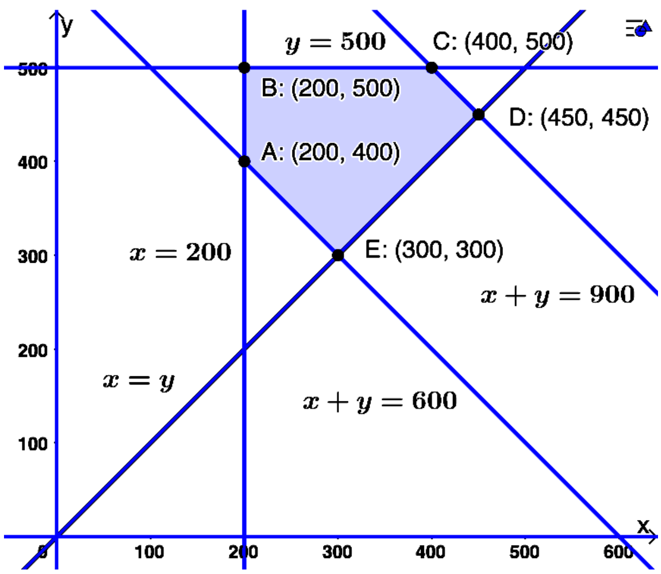
$$\begin{cases} ① \ x \leq y & \to (0,0) \quad \& \quad (500,500) \\ ② \ x + y \geq 600 & \to (0,600) \quad \& \quad (600,0) \\ ③ \ x + y \leq 900 & \to (0,900) \quad \& \quad (900,0) \\ ④ \ x \geq 200 & \to (200,0) \\ ⑤ \ y \leq 500 & \to (0,500) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 15x + 10y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	200	400	7000
B	200	500	8000
C	400	500	11000
D	450	450	11250
E	300	300	7500



La propuesta que supone un *beneficio máximo* es la de 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y reportará 11250€.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *(1 punto) Halle* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx$.

b) *(1 punto) Considere*

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+5} \qquad \& \qquad g(x) = \ln x$$

Halle la derivada de la función compuesta $(f \circ g)(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \underbrace{\frac{4x}{2x^2+5}}_{u'/u}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \ln\left(2x^2+5\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{4}\cdot\ln 7\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot \ln 5\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{4}\cdot\ln(7/5) = \ln\sqrt[4]{7/5} \simeq 0.0841$$

b) $$(f\circ g)(x) = f\big[g(x)\big] = f(\ln x) = \frac{\ln x}{2\ln^2 x + 5}$$

$$(f\circ g)'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\left(2\ln^2 x+5\right) - \ln x\cdot 4\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\left(2\ln^2 x+5\right)^2} = \frac{2\ln^2 x + 5 - 4\ln^2 x}{x\cdot\left(2\ln^2 x+5\right)^2}$$

$$= \frac{-2\ln^2 x+5}{x\cdot\left(2\ln^2 x+5\right)^2}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que:

$$P(A) = 0.7 \qquad \& \qquad P(B^c) = 0.7 \qquad \& \qquad P(A \cap B) = 0.2$$

a) (1 punto) ¿Son A y B independientes?. Justifique su respuesta

b) (1 punto) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

Nota: *A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Utilizaremos la notación $\overline{A}$ para el suceso complementario del suceso A.

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$

- $P(A \cap B) = 0.2$
- $P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{cases}$$

b) $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]$$
$$= 1 - (0.7 + 0.3 - 0.2) = 0.2$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0.5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de las bolsas de palomitas (gr)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 10)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 10) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 200$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$$

$$I.C._{95\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(\mu) = (195.62; 204.38)}$$

b) $n =?$ & $E < 0.5$ & $1 - \alpha = 0.9$

$$1-\alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.05 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} < 0.5 \Rightarrow n > \left(1.645 \cdot \frac{10}{0.5}\right)^2 = 1082.41 \Rightarrow \boxed{n = 1083}$$

Julio 2022 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a = a \cdot (a-1) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

Si $a = \{0,1\}$ $\quad |A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3 \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xRightarrow{Rouche}$ El Sistema NO es Compatible Determinado.

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y - 3 \cdot 0 = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = 0 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & , \text{ si } x \leq 1 \\ (x-a)^2 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a) (1 punto) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.

b) (1 punto) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, luego solo hay que estudiar la continuidad de la función en la frontera $x = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(ax^2 - 1\right) = a - 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} = (1-a)^2$
- $f(1) = a \cdot 1^2 - 1 = a - 1$

$f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \lim\limits_{x \to 1} = f(1)$

$$a - 1 = (1-a)^2 \implies a - 1 = a^2 - 2a + 1 \implies a^2 - 3a + 2 = 0 \implies \boxed{a = \{1, 2\}}$$

b) Para $a = 1/2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0 \implies \begin{cases} x = -\sqrt{2} \implies \boxed{(-\sqrt{2}, 0)} \\ \cancel{x = \sqrt{2}} > 1 \end{cases} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \implies \cancel{x = 1/2} < 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingestión de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5},\ 0 \leq t \leq 60$$

a) (1 punto) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $^{15}/_{e}$.

b) (1 punto) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: *Expresa los resultados con 2 cifras decimales.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) La tasa de variación instantánea no es otra cosa más que la derivada, por lo que en el enunciado nos están diciendo que $f'(5) = {}^{15}/_{e}$

$$f'(t) = 2Cte^{-t/5} + Ct^2 e^{-t/5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = Cte^{-t/5} \cdot \left(2 - \frac{t}{5}\right)$$

$$f'(5) = \frac{15}{e} \implies 5C \cdot \frac{1}{\cancel{e}} = \frac{15}{\cancel{e}} \implies \boxed{C = 3}$$

b) Para $C = 3 \implies f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5},\ 0 \leq t \leq 60$ y su derivada:

$$f'(t) = 3te^{-t/5} \cdot \left(2 - \frac{t}{5}\right) = 0 \implies \begin{cases} 3t = 0 \implies t = 0 \\ e^{-t/5} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \\ 2 - \dfrac{t}{5} = 0 \implies t = 10 \end{cases}$$

	$(0, 10)$	$(10, 60)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La cantidad de glucosa en sangre disminuye a partir de los 10 minutos de la administración del medicamento. La cantidad máxima de glucosa en sangre se produce a los 10 minutos y vale $f(10) = 90 + \dfrac{300}{e^2} \simeq 130.6\ mg/dl$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entree los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

a) (1 punto) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

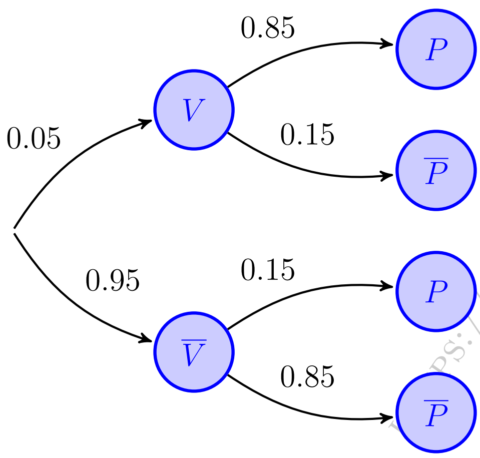
b) (1 punto) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$$V \equiv \text{“El paciente es portador del virus”}$$
$$P \equiv \text{“El test da positivo en detección del virus”}$$



a) $$\begin{aligned} P(P) &= P\big((V \cap P) \cup (\overline{V} \cap P)\big) \\ &= P(V \cap P) + P(\overline{V} \cap P) \\ &= P(V) \cdot P(P \mid V) + P(\overline{V}) \cdot P(P \mid \overline{V}) \\ &= 0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.15 = 0.185 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(V \mid P) &= \frac{P(V \cap P)}{P(P)} = \frac{P(V) \cdot P(P \mid V)}{P(P)} \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.85}{0.185} = 0.2297 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa caracterísitica de la muestra?

b) (1 punto) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los indiviuos de la muestra posean dicha característica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2022 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{B}(120, 0.64) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 120 > 10 \checkmark \\ np = 76.8 > 5 \checkmark \\ nq = 43.2 > 5 \checkmark \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(76.8, 5.26)$

b) El 70 % de los individuos de la muestra son $0.7 \cdot 120 = 84$

$$P(X > 84) = P(Y \geq 84.5) = P\left(Z \geq \frac{84.5 - 76.8}{5.26}\right) = P(Z \geq 1.46)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.46) = 1 - 0.9279 = 0.0721$$