Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos

EVAU JUNIO 2022

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

11 de junio de 2022

Junio 2022
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.*

b) *(1 punto) Calcule A^{-1} para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$. Por lo que $\exists\, A^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $\quad |A| = 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3$

$$\mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

El dueño de una empresa que organia fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche y por cada litro de leche debe echar como máximo 1.6 litros de chocolate. Además solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1 euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcular el beneficio que se obtiene.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

- `Incógnitas`

$$x \equiv \text{“Cantidad de leche en la mezcla (litros)”}$$
$$y \equiv \text{“Cantidad de chocolate líquido en la mezcla (litros)”}$$

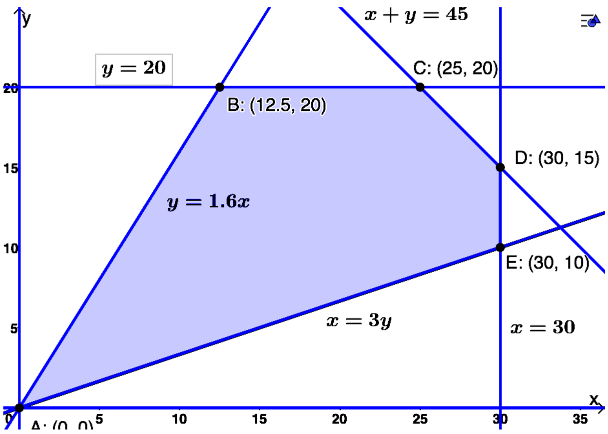
- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x \leq 3y & \to (0,0) \quad \& \quad (30,10) \\ ② \ y \leq 1.6x & \to (0,0) \quad \& \quad (10,16) \\ ③ \ x+y \leq 45 & \to (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ ④ \ x \leq 30 & \to (30,0) \\ ⑤ \ y \leq 20 & \to (0,20) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

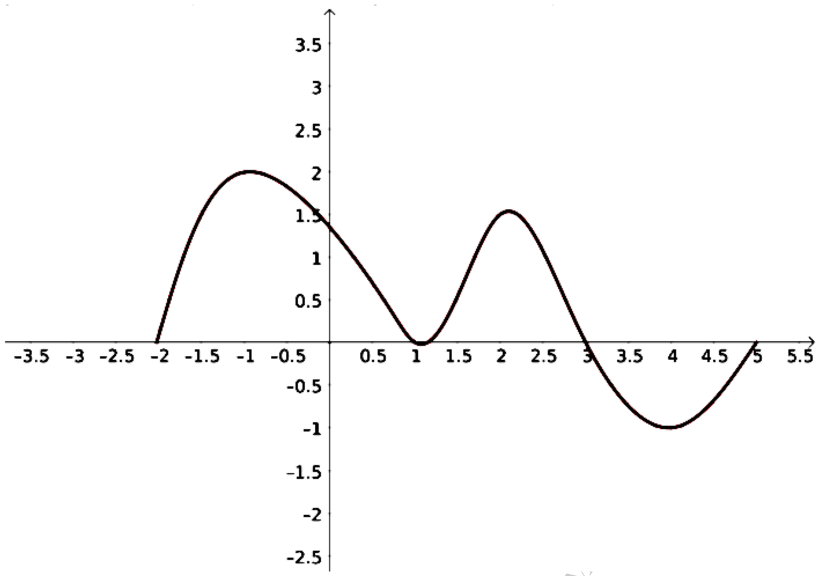


Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	12.5	20	52.5
C	25	20	65
D	30	15	60
E	30	10	50

El *beneficio máximo* es de 65 euros y se produce mezclando 25 litros de leche y 20 de chocolate líquido.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$.

a) (1 punto) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) (1 punto) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

a) Los intervalos en los que $f'(x) > 0$ corresponden a aquellos en los que la función es creciente, es decir: $(-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5)$.

b) La integral $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ representa la suma de áreas acotadas por la función $f(x)$ y el eje OX entre los puntos $x = -2$ y $x = 5$. Las áreas situadas por encima del eje de abscisas tendrán signo positivo, mientras que las que están por debajo del citado eje tendrán signo negativo. Como las áreas que están por encima del eje OX son superiores a la que se encuentra por debajo del mismo, la integral pedida tendrá signo positivo.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.6 \qquad \& \qquad P(A \mid B) = 0.4 \qquad \& \qquad P(A \mid B^c) = 0.8$$

, siendo B^c el suceso complementario de B.

a) (1 punto) Calcule $P(B)$.

b) (1 punto) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

Utilizaremos la notación $\overline{B}$ para el suceso complementario del suceso B.

a) $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.4 \implies P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(B) \circledast$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{0.6 - 0.4 \cdot P(B)}{1 - P(B)} = 0.8 \implies 0.6 - 0.4 \cdot P(B) = 0.8 - 0.8 \cdot P(B)$$

$$\implies \begin{cases} 0.4 \cdot P(B) = 0.2 \implies \boxed{P(B) = 0.5} \\ P(A \cap B) = 0.4 \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2 \end{cases}$$

b) $$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{c} P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \\ \text{Los sucesos } A \text{ y } B \text{ no son independientes} \end{array}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{“Peso de los sacos de cemento (kg)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 50$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (48.85; 51.15)}$$

b) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10.82 \implies \boxed{n = 11}$$

Junio 2022
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax - y - a = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.*

b) *(1 punto) Resuelva el sistema para $a = 2$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a - 2a^2 = 2a \cdot (1 - a) = 0 \implies a = \{0, 1\}$$

- Si $a \neq \{0, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}} \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 - \frac{1}{4} = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5 - 4z = -4 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -y = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/4 \\ y = 1 \\ z = -1/4 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

a) (1 punto) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblícuas).

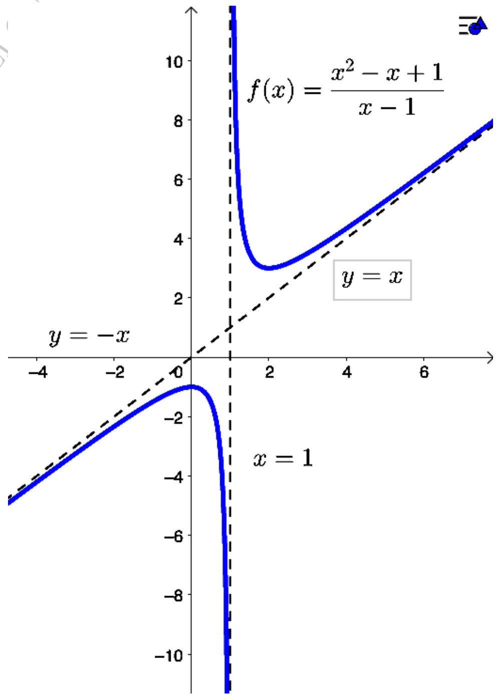
b) (1 punto) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) ▪ `A. Vertical` $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$



▪ `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists \ A.H.$$

▪ `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

Luego hay una asíntota oblicua en $y = x$.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 1) \cdot (x - 1) - (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$f'(2) = \dfrac{4 - 4}{(2 - 1)^2} = 0$, luego en $x = 2$ hay un punto singular

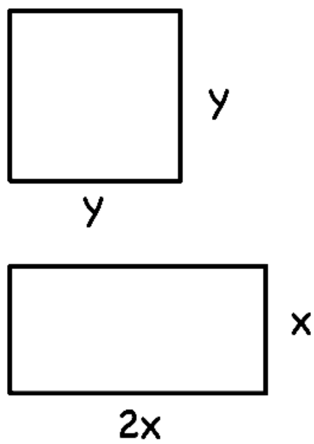
Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de $euro/cm^2$ para el cuadrado y 10 céntimos de $euro/cm^2$ para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

Nombramos las incógnitas como se muestra en la figura, de manera que:



$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = 4y + 6x = 450 \implies y = \dfrac{225-3x}{2} \\ C(x,y) = 0.16y^2 + 0.1 \cdot 2x \cdot x \end{array}\right\}$$

$$\implies C(x) = 0.16 \cdot \left(\frac{225-3x}{2}\right)^2 + 0.2x^2 = 0.56x^2 - 54x + 2025$$

$C'(x) = 1.12x - 54 = 0 \implies x = 48.214$

$C''(x) = 1.12 \implies C''(48.214) > 0 \overset{(\cup)}{\implies}$ Mín en $x = 48.214$

Por lo que la longitud de los trozos que hace mínimo el coste de fabricación de las figuras será: $6x = 289.284$ cm para el rectángulo y $450 - 289.284 = 160.716$ cm para el cuadrado.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

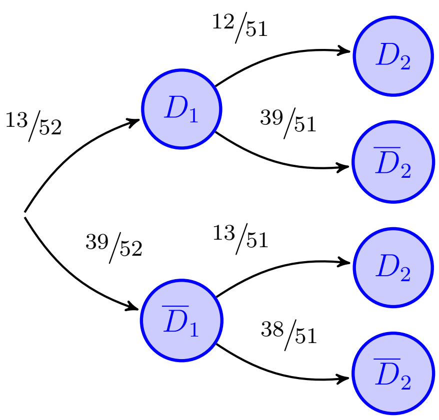
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) (1 punto) Si la carta observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución. Sean los sucesos:

$$D_i \equiv \text{“La carta de la extracción } i \text{ es de diamantes”}$$



a) $P(D_2) = P\Big((D_1 \cap D_2) \cup (\overline{D}_1 \cap D_2)\Big)$

$$= P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D}_1 \cap D_2)$$

$$= P(D_1) \cdot P(D_2 \mid D_1) + P(\overline{D}_1) \cdot P(D_2 \mid \overline{D}_1)$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4} = 0.25$$

b) $P(\overline{D}_1 \mid \overline{D}_2) = \dfrac{P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)}{P(\overline{D}_2)} = \dfrac{P(\overline{D}_1) \cdot P(\overline{D}_2 \mid \overline{D}_1)}{1 - P(D_2)}$

$$= \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{38}{51} = 0.754$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) (1 punto) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73.8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) (1 punto) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) \xrightarrow{n=10} I.C.(58.2; 73.8)$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = \frac{73.8 - 58.2}{2} = 7.8 \implies E = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 7.8 \implies \boxed{\sigma = 12.58}$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 20) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 6.32\right)$

$$\begin{aligned} P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) &= P\left(\frac{-10}{6.32} < Z < \frac{10}{6.32}\right) = P(-1.58 < Z < 1.58) \\ &= P(Z < 1.58) - P(Z < -1.58) = P(Z < 1.58) - P(Z > 1.58) \\ &= P(Z < 1.58) - \Big[1 - P(Z < 1.58)\Big] = 2 \cdot P(Z < 1.58) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.9429 - 1 = 0.8858 \end{aligned}$$