

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS EXÁMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2022

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

13 de octubre de 2021

Modelo 2022

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) (1 punto) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1} .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = 2a - 4 = 0 \implies a = 2$. Por lo que $\exists A^{-1}$, $\forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $a = 0$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $|A| = 2 \cdot 0 - 4 = -4$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^T = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3 \quad \& \quad 2x + y \leq 8 \quad \& \quad x + 2y \leq 10 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \& \quad y \geq 0$$

- a) (1 punto) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
- b) (1 punto) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S , indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

Solución.

- **Región Factible** Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1} \ x + y \geq 3 & \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (3, 0) \\ \textcircled{2} \ 2x + y \leq 8 & \rightarrow (0, 8) \quad \& \quad (4, 0) \\ \textcircled{3} \ x + 2y \leq 10 & \rightarrow (0, 5) \quad \& \quad (10, 0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

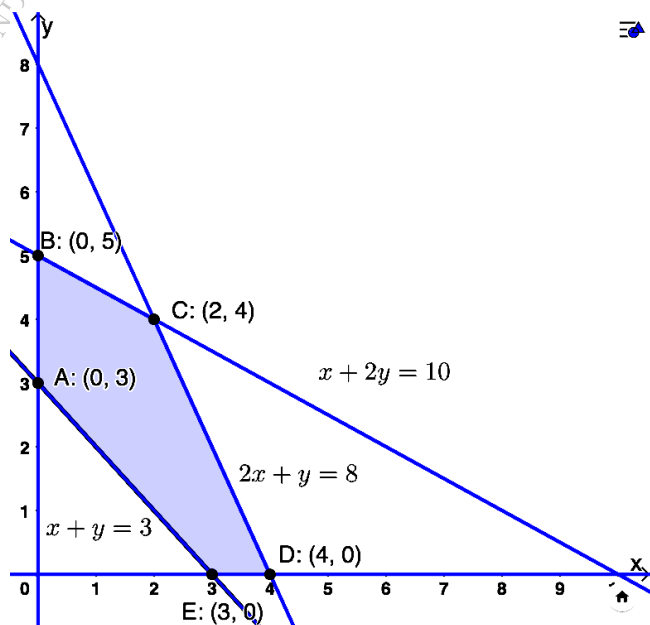
- **Función objetivo** $f(x, y) = 2x + 3y$

- **Región factible** Representamos S y hallamos los vértices.

- **Optimización de F.O.**
Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x, y)$
A	0	3	9
B	0	5	15
C	2	4	16
D	4	0	8
E	3	0	6

Por tanto la *función factible* $f(x, y)$ tiene un valor máximo igual a 16 que se produce en el punto $C(2, 4)$.



Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

a) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule

$$\int_0^1 2x \cdot f(x) dx$$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) Recta tangente en $x = 0$

$$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$$

$$\implies (x_0, y_0) = (0, 1)$$

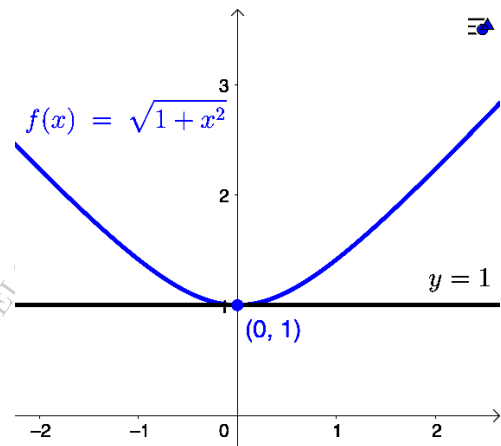
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 0$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0)$$

$$r \equiv y = 1$$



$$b) \int_0^1 2x \cdot f(x) dx = \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2 + 1}}_{\sqrt{u}} dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{8} - 1) \simeq 1,2189$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2 puntos)

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

- (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.
- (1 punto) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

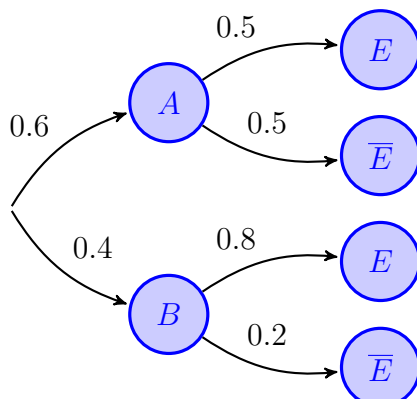
Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El plato es del primer restaurante"

$B \equiv$ "El plato es del segundo restaurante"

$E \equiv$ "El plato es productos ecológicos"



$$\begin{aligned} \text{a) } P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A) \cdot P(E | A) + P(B) \cdot P(E | B) \\ &= 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(B | \bar{E}) &= \frac{P(B \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(B) \cdot P(\bar{E} | B)}{1 - P(E)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.62} = 0.2105 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0.25 horas.

- a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ no supere las 2.9 horas si $\mu = 2.75$ horas.
- b) (1 punto) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2.9388, 3.0613) para μ , determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(2.75, 0.25) \xrightarrow{n=25} \bar{X} : \mathcal{N}\left(2.75, \frac{0.25}{\sqrt{25}} = 0.05\right)$

$$P(\bar{X} < 2.9) = P\left(Z < \frac{2.9 - 2.75}{0.05}\right) = P(Z < 3) = 0.9987$$

b) $n = 64$ & $IC = (2.9388, 3.0623)$

$$E = \frac{3.0623 - 2.9388}{2} = 0.06125 \xrightarrow{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.25}{\sqrt{64}} = 0.06125 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \xrightarrow{Tabla} 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.95}$$

_____ o _____

Modelo 2022

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ x - y + az & = & -1 \\ 2x + y + z & = & 6 \end{array} \right\}$$

- a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .
 b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = -2$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHE

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = -3a + 3 = 0 \implies a = 1$$

- Si $a \neq 1$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$$

- b) Resolvemos el sistema para $a = -2$ por el método de Gauss, sabiendo que como

$a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x - 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 \\ -3z = -3 \Rightarrow z = 1 \\ 3y - 1 = 2 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left[\begin{array}{l} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a=1 \end{cases}$$

- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. INCOMPATIBLE}$
- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \square & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMP. DETERMINADO}$

- b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = -2$.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x - 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 \\ 3y - 1 = 2 \Rightarrow y = 1 \\ -3z = -3 \Rightarrow z = 1 \end{array}$$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x - 3}$$

- a) (1 punto) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
- b) (1 punto) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x = \{-3, 1\} \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

- A. Vertical Buscamos las asíntotas verticales entre los puntos que no pertenecen al dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \left[\frac{10}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \left[\frac{10}{0^-} \right] = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{10}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\frac{10}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{10}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

- A. Horizontal

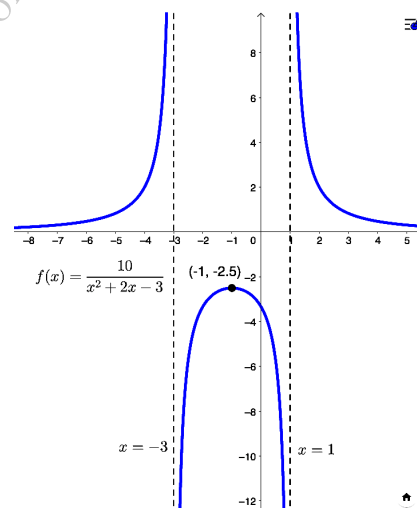
$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $f'(x) = \frac{-20 \cdot (x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \implies -20 \cdot (x + 1) = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘	Decreciente ↘

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ y *decreciente* en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(-1, -5/2)$.



Ejercicio 3 (2 puntos)

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.
- b) (1 punto) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

- Si $x < 2$, $f(x) = ax^2 - 2x$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 2$, $f(x) = \ln(x-1)$, que es continua en $x-1 > 0 \implies x > 1$, luego continua en $x > 2$.
- Si $x = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 - 2x) = 4a - 4$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-1) = 0$
 - $f(2) = a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 4a - 4$

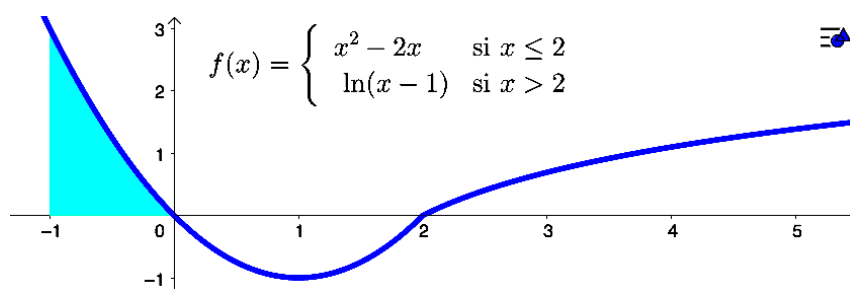
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$4a - 4 = 0 \implies \boxed{a = 1}$$

Entre las rectas verticales $x = -1$ y $x = 0$ la función, para $a = 1$, $f(x) = x^2 - 2x$, que corta al eje OX en $x = 0$ y $x = 2$, lo que define un único recinto $A_1 = (-1, 0)$

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Area} = |A_1| = \frac{4}{3} \simeq 1.333 \text{ u}^2$$



Ejercicio 4 (2 puntos)

Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.
- b) (1 punto) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ "Los deportistas tienen **beca** de alto rendimiento"

$E \equiv$ "Los deportistas cursan **estudios superiores**"

$$P(B) = 0.5 \quad \& \quad P(E) = 0.3 \quad \& \quad P(B \cap E) = 0.1$$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7$

b) $P(\bar{B} \mid \bar{E}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \frac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \frac{1 - 0.7}{1 - 0.3} \simeq 0.4286$

_____ o _____

Ejercicio 5 (2 puntos)

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

- a) (1 punto) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 98 % para estimar μ .
- b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2022 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 6) \xrightarrow{n=81} \bar{x} = 44$

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \alpha/2 = 0.01 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 2.33$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{81}} = 1.58$$

$$I.C. = (\bar{x} - E; \bar{x} + E) \Rightarrow I.C. = (42.42; 45.58)$$

b) $n = ?$ & $2E \leq 3 \Rightarrow E \leq 1.5$ & $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1.5 \Rightarrow n \geq \left(1.96 \cdot \frac{6}{1.5}\right)^2 = 61.47 \Rightarrow n = 62$$

_____ o _____