Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JUNIO 2021
(Coincidentes)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

7 de julio de 2021

Junio 2021 (coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) *(1.25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.*

b) *(0.75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m*

c) *(0.5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $|A| = -1 - m = 0 \implies m = -1 \implies \exists A^{-1},\ \forall m \neq -1$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & -m \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \frac{1}{-1-m} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq -1 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

c) Resolvemos el sistema para $m = 2$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[F_2 - 2F_1 \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[F_3 - F_2 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - \frac{1}{3} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3z = -1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

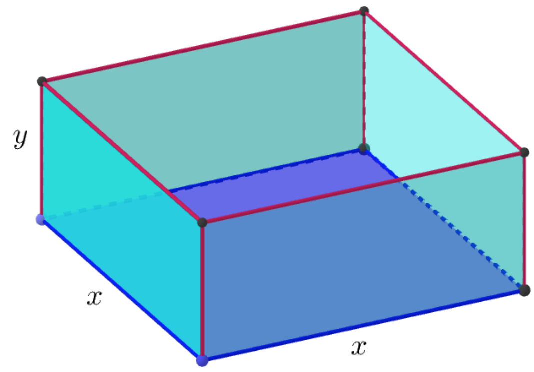
Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m², el material metálico, de 90 euros/m², y el cristal, de 25 euros/m².

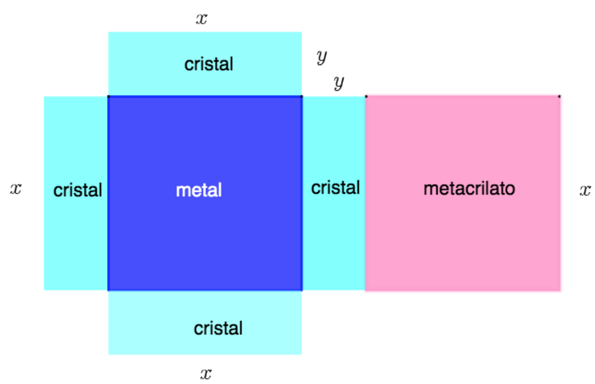
a) *(0.75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.*

b) *(1.75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.





a) Calculamos el coste del acuario, teniendo en cuenta el precio de los materiales:

$$C = 90x^2 + 15x^2 + 4 \cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \implies y = \frac{C - 105x^2}{100x}$$

b) $C = 1260 \implies y = \dfrac{1260 - 105x^2}{100x}$

$$V(x,y) = x^2 \cdot y \implies V(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1260 - 105x^2}{100\cancel{x}} = \frac{1260x - 105x^3}{100}$$

$$V'(x) = \frac{1260 - 315x^2}{100} = 0 \implies 1260 - 315x^2 = 0 \implies \begin{cases} \cancel{x = -2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$V''(x) = -630x \implies V''(2) = -1260 < 0 \xrightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } x = 2$$

Por lo que el volumen máximo del acuario con un presupuesto de 1260 euros se obtendrá con unas dimensiones de $x = 2\ m$ y $y = 4.2\ m$ y será de $V(2) = 16.8\ m^3$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Desde el punto $P_1(1,1,-1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2(0,0,0)$. Se pide:

a) *(1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.*

b) *(1 punto) Hallar una ecuación del plano π.*

c) *(0.5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) La recta r pedida une los puntos P_1 y P_2

$$r \equiv \begin{cases} P_2(0,0,0) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{P_2P_1} = (1,1,-1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El plano π pasa por el punto P_2 y es perpendicular a r

$$\pi \equiv \begin{cases} P_2(0,0,0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow x+y-z+D=0 \xrightarrow{P_2 \in r} D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-z=0$$

c) $d(P_1, \pi) = \dfrac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$

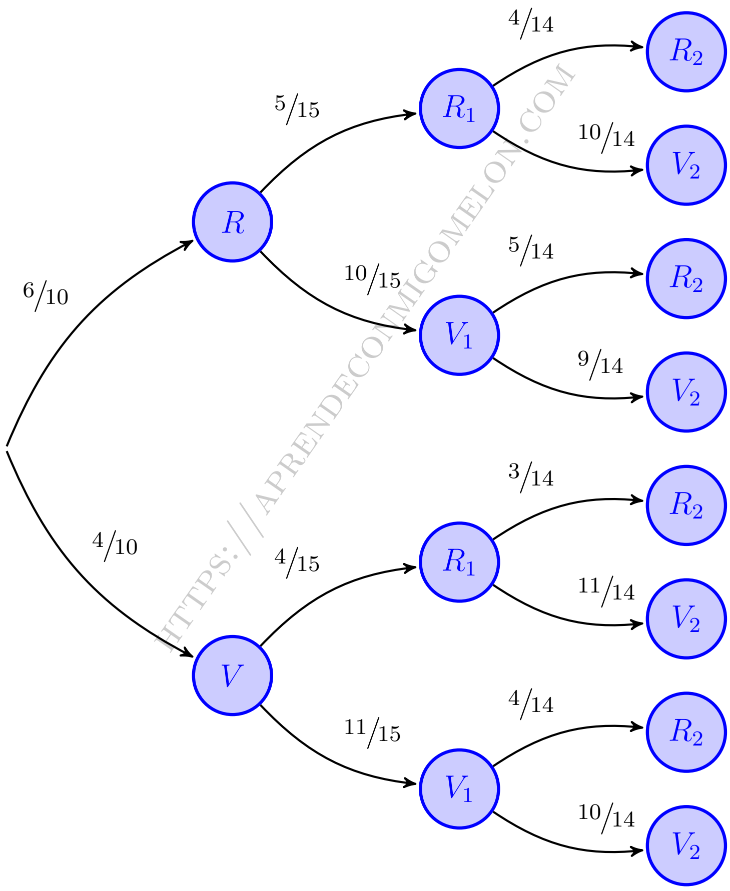
Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{array}{ll} R \equiv \text{"Calcetín rojo del cajón 1"} & V \equiv \text{"Calcetín verde del cajón 1"} \\ R_i \equiv \text{"Extracción } i\text{, calcetín rojo"} & V_i \equiv \text{"Extracción } i\text{, calcetín rojo"} \end{array}$$



$$P(\text{mismo color}) = P(\text{dos rojos}) + P(\text{dos verdes}) = P(R \cap R_1 \cap R_2) + P(V \cap R_1 \cap R_2)$$
$$+ P(R \cap V_1 \cap V_2) + P(V \cap V_1 \cap V_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14}$$
$$+ \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{41}{75} \approx 0.5467$$

Junio 2021 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una tienda online de productos gourmet *elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a* 7.85 *euros/kg), el Paradiso (a* 13.3 *euros/kg) y el Cremissimo (a* 24.85 *euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un* 90 % *de grano tipo Arábica, el Paradiso un* 85 % *y el Cremissimo un* 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27.1 *kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de* 3112.5 *euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Kg de café Gold Cuvée"}$$
$$y \equiv \text{"Kg de café Paradiso"}$$
$$z \equiv \text{"Kg de café Cremissimo"}$$

Del enunciado tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.1x + 0.15y + 0.2z = 27.1 \\ 7.85x + 13.3y + 24.85z = 3112.5 \\ z = 2 \cdot (x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 542 \\ 157x + 266y + 497z = 62250 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 157 & 266 & 497 & 62250 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - 157F_1 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 0 & 61 & 366 & 39406 \\ 0 & -1 & -5 & -542 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ 61F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 542 \\ 0 & 61 & 366 & 39406 \\ 0 & 0 & 61 & 6344 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 3\cdot 22 + 4 \cdot 104 = 542 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 61y + 366 \cdot 104 = 39406 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 61z = 6344 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 30 \\ y = 22 \\ z = 104 \end{array}}$$

Los kg de grano tipo Arabica utilizados serán:

$$0.9x + 0.85y + 0.8z = 0.9 \cdot 30 + 0.85 \cdot 22 + 0.8 \cdot 104 = 128.9\ kg$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) *(0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en* $[-2,4]$.

b) *(1.25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de* $f(x)$ *en* $[-2,4]$.

c) *(0.75 puntos) Determine si la función* $g(x) = f'(x)$ *es continua en* $x = 2$ *y si tiene recta tangente en dicho punto.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Como la función es la raíz de índice impar de un polinomio, su dominio es toda la recta real $\mathbb{R}$ y por tanto la función es continua en $[-2,4]$.
Veamos la derivabilidad de $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2} = (x-2)^{2/5} \implies f'(x) = \frac{2}{5}(x-2)^{-3/5} = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

$$f'(2^-) = -\infty \quad \& \quad f'(2^+) = +\infty$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$. En nuestro caso $f(x)$ es derivable en $[-2,2) \cup (2,4]$.

b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2}{5}(x-2)^{-3/5} = 0 \implies \nexists \text{ P.S.}$$

	$(-2,2)$	$(2,4)$
Signo $f'(x)$	-	+
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-2,2)$ y *creciente* en $(2,4)$. Analizamos los valores que toma la función en los extremos del intervalo: $f(-2) = \sqrt[5]{16}$ & $f(4) = \sqrt[5]{4}$. Por lo tanto hay un *máximo absoluto* en $\left(-2, \sqrt[5]{16}\right)$ y un *mínimo relativo* y *absoluto* en $(2,0)$.

c) $g(x) = f'(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}}$ no es continua en $x = 2$ y por tanto no tiene recta tangente en ese punto.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2,3,-5)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(-1,-2,2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x-2y-2z=1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0.75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0.75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45°, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) El punto de impacto será la intersección de la recta r que pasa por $P(2,3,-5)$ y lleva la dirección de $\vec{v}=(-1,-2,2)$ y el plano $\pi \equiv 3x-2y-2z=1$.

$$r \equiv \begin{cases} P(2,3,-5) \\ \vec{d_r}=\vec{v}=(-1,-2,2) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-5+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$Q=r\cap\pi \implies 3\cdot(2-\lambda)-2\cdot(3-2\lambda)-2\cdot(-5+2\lambda)=1 \xrightarrow{\lambda=3} Q(-1,-3,1)$$

b) Hallamos el ángulo que forman el plano y el rayo

$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\left|\vec{d_r}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{d_r}\right|\cdot\left|\vec{n}_\pi\right|}=\frac{|(-1,-2,2)\cdot(3,-2,-2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{17}}=\frac{|-3+4-4|}{3\sqrt{17}}$$

$$=\frac{\sqrt{17}}{17} \implies \alpha=14.04° < 45° \text{ el rayo se refleja en la placa}$$

c) Buscamos el punto P', simétrico de P respecto del plano π.

- Hallamos $r \perp \pi \mid P \in r$.

$$r \equiv \begin{cases} P(2,3,-5) \\ \vec{d_r}=\vec{n}_\pi=(3,-2,-2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-5-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- $O=r\cap\pi$

$$3\cdot(2+3\lambda)-2\cdot(3-2\lambda)-2\cdot(-5-2\lambda)=1 \xrightarrow{\lambda=-9/17} O\left(\frac{7}{17},\frac{69}{17},-\frac{67}{17}\right)$$

- $O=M_{\overline{PP'}}=\dfrac{P+P'}{2} \implies P'=2O-P \implies \boxed{P'\left(-\frac{20}{17},\frac{87}{17},-\frac{49}{17}\right)}$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El delantero de un equipo de fútbol que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0.999.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Nº de penaltis marcados"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5} = 0.6\right)$$

a) $P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^4 = 0.0256$

b) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 + \binom{4}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^0 = 0.4752$

c) $X : \mathcal{B}(n, 0.6)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^n > 0.999 \implies 0.4^n < 0.001$$

$$n \ln 0.4 < \ln 0.001 \implies n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.4} = 7.538 \implies \boxed{n = 8}$$