Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos

EVAU JULIO 2021
Extraordinario

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

10 de julio de 2021

Julio 2020 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz X que satisface $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) $|A| = -a - 1 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Para $a = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ & $|A| = -2 - 1 = -3$

$$\text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0.5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) (1 punto) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) (1 punto) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

Solución.

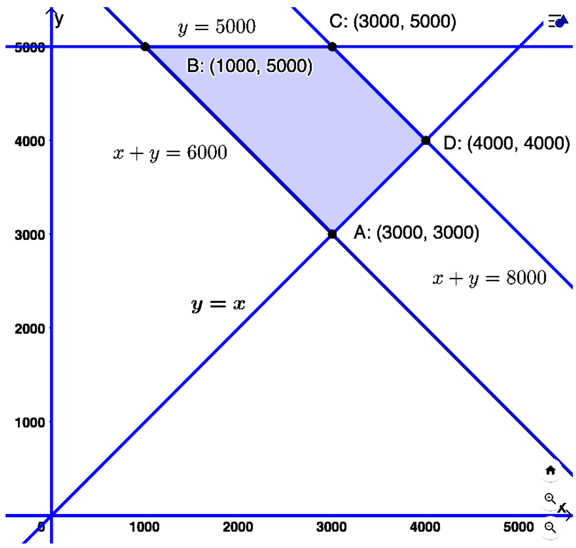
- `Incógnitas` $x \equiv$ "m de cable A2020"
  $y \equiv$ "m de cable B2020"

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \ x + y \geq 6000 & \to (0, 6000) \quad \& \quad (6000, 0) \\ ② \ y \leq 5000 & \to (0, 5000) \\ ③ \ x + y \leq 8000 & \to (8000, 0) \quad \& \quad (8000, 0) \\ ④ \ y \geq x & \to (0, 0) \quad \& \quad (5000, 5000) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x, y) = 2x + 0.5y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x, y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	3000	3000	7500
B	1000	5000	4500
C	3000	5000	8500
D	4000	4000	10000

Por tanto el *coste mínimo* es de 4500 euros y se produce con una producción de 1000 m de A2020 y 5000 m de B2020.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si\ x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si\ x > 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

a) `Continuidad:`

- Si $x < 3$, $f(x) = x^2 - x - 1$, que es continua en $\mathbb{R}$, porque es un polinomio
- Si $x > 3$, $f(x) = \dfrac{3a}{x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego continua en $x > 3$.
- Si $x = 3$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - x - 1) = 5 \\ &\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{3a}{x} = a \\ &f(0) = 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{aligned} &f(x) \text{ será continua en } x = 3 \text{ si:} \\ &\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \\ &\Longrightarrow \boxed{a = 5} \end{aligned}\right.$$

`Derivabilidad:` Para $a = 5$ la función será:

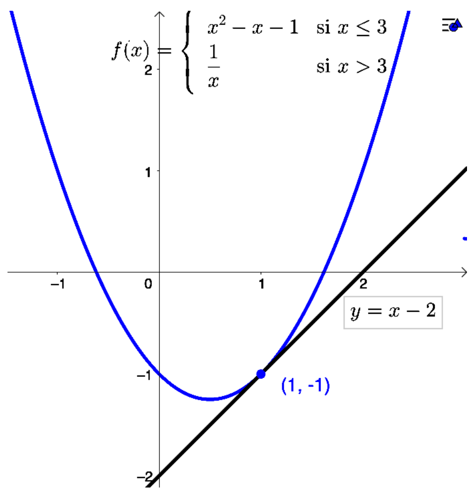
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{15}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &f'(3^-) = 5 \\ &f'(3^+) = -\frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{aligned} &\text{Como } f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ &f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \end{aligned}\right.$$

b) Para $a = 1$ la función $f(x)$ será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \Longrightarrow y_0 = f_1(x_0) = f_1(1) = -1$$
$$\Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, -1)$$
$$f_1'(x) = 2x - 1$$
$$m_r = f_1'(x_0) = f_1'(1) = 1$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$y + 1 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = x - 2$$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que*
>
> $$P(A) = 0.5 \qquad \& \qquad P(\overline{B}) = 0.8 \qquad \& \qquad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$$
>
> *a) (1 punto) Estudie si los sucesos A y B son independientes.*
>
> *b) (1 punto) Calcule $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)*

Solución.

a) $P(\overline{B}) = 0.8 \implies P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.9 \implies P(A \cap B) = 0.1$

$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$

$P(A \cap B) = 0.1 = P(A) \cdot P(B) \implies A$ y B son sucesos independientes.

b) $$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap P(\overline{B}))}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})}$$

$$= \frac{1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]}{P(\overline{B})} = \frac{1 - (0.5 + 0.2 - 0.1)}{0.8} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) (1 punto) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los huevos (gr)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 8)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 8) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 60$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{20}} = 3.506$

$I.C = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C. = (56.494; 63.506)}$

b) $X : \mathcal{N}(59, 8) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(59, \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right)$

$$\begin{aligned} P(57 < \overline{X} < 61) &= P\left(\frac{57-59}{8/\sqrt{10}} < Z < \frac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - P(Z < -0.79) = P(Z < 0.79) - P(Z > 0.79) \\ &= P(Z < 0.79) - \Big[1 - P(Z < 0.79)\Big] = 2 \cdot P(Z < 0.79) - 1 \\ &= 2 \cdot 0.7852 - 1 = 0.5704 \end{aligned}$$

———————— ◦ ————————

Julio 2020 (Extraordinario)
OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x+2ay+z&=0\\ -x-ay&=1\\ -y-z&=-a \end{aligned}\right\}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a=3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0\\ -1 & -a & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a+1 = 0 \implies a=1$$

- Si $a\neq 1 \quad |A|\neq 0 \implies \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*)\neq \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.}=3 \xrightarrow{Rouche}$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 1$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x-6+4=0 \\ \Rightarrow 3y+4=1 \\ \Rightarrow -2z=-8 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right) \overset{a\neq -1/2}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3+F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-1=0 \\ \boxed{a=1} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $a = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a=3$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+4-6=0 \\ \Rightarrow z-3=1 \\ \Rightarrow 2y=-2 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ z=4 \\ y=-1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) (1 punto) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $(x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \implies \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- `A. Vertical` Buscamos las asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio de la función

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal`

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

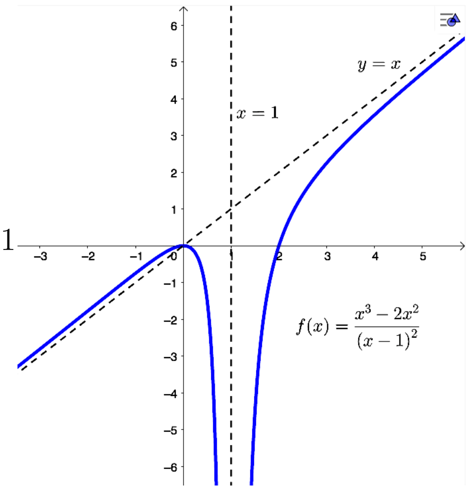
- `A. Oblicua` Será una recta: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x^3-2x^2+x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{2x^2} - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{(x-1)^2}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \implies A.O. \text{ en } y = x$$



b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)\cdot(x-1)^{\cancel{2}} - (x^3-2x^2)\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3} = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \implies x\cdot(x^2-3x+4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \nexists\ \text{Sol.} \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 1)$, y tiene un *máximo relativo* en $(0, 0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

a) (1 punto) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

b) (1 punto) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)

Solución.

a) $f'(x) = 3x^2 + 8x \implies f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(3x^2 + 8x\right) dx = x^3 + 4x^2 + C$

$f(1) = 11 \implies 1 + 4 + C = 11 \implies C = 6 \implies \boxed{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6}$

b) Hallamos los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x \cdot (3x + 8) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 8 = 0 \implies x = -8/3 \end{cases}$$

	$(-\infty, -8/3)$	$(-8/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -8/3) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-8/3, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0, 6)$ y un *máximo relativo* en $(-8/3, 418/27)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

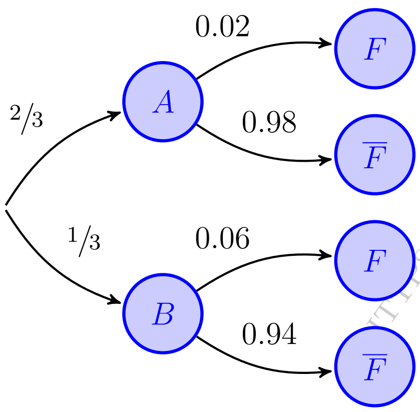
> *Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0.02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0.06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:*
>
> *a) (1 punto) No sufra fracaso escolar.*
>
> *b) (1 punto) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)*

Solución.

Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{"El alumno reside en el municipio } A\text{"}$$
$$B \equiv \text{"El alumno reside en el municipio } B\text{"}$$
$$F \equiv \text{"El alumno tiene fracaso escolar"}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 2 \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 \cdot P(B) + P(B) = 1 \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$



a) $P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F})$

$$= P(A) \cdot P(\overline{F} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967$$

b) $P(A \mid F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{1 - P(F)}$

$$= \frac{2/3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.4$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

> *El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.*
>
> *a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.*
>
> *b) (1 punto) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30.5 minutos.*
>
> *(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2021 - Opción B)*

Solución.

$$X \equiv \text{"Tiempo para hacer el test (minuotos)"} \qquad \& \qquad X : \mathcal{N}(\mu, 3)$$

a) $n = ? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1-{}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1.96 \cdot 3)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(32, 3) \xrightarrow{n=16} \overline{X} : \mathcal{N}\left(32, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = \mathcal{N}(32, 0.75)$

$$P(\overline{X} < 30.5) = P\left(Z < \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

———————— ∘ ————————