

MATEMÁTICAS II
EXÁMENES RESUELTOS
PAU Y EVAU

JUNIO 2021
(ORDINARIO)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

10 de junio de 2021

Junio 2021 - Ordinario

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

Calcularemos los precios de cada una de las acciones que llamaremos a , b y c .

$$b = 1 \quad \& \quad a = 3b \implies a = 3 \quad \& \quad a = \frac{c}{2} \implies c = 6$$

Sean las incógnitas:

$x \equiv$ "Nº de acciones de la empresa A"

$y \equiv$ "Nº de acciones de la empresa B"

$z \equiv$ "Nº de acciones de la empresa C"

Escribimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 6 & 1560 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left[F_2 - 3F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left[2F_3 + F_2 \right] \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 540 \\ 0 & -2 & 3 & -60 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 120 + 60 = 540 \Rightarrow x = 360 \\ -2y + 3 \cdot 60 = -60 \Rightarrow y = 120 \\ -z = -60 \Rightarrow z = 60 \end{array} \end{aligned}$$

Para obtener un reparto equitativo de las acciones daremos un tercio a cada hermano, es decir: 120 acciones de A, 40 acciones de B y 20 de C.

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = 2 + x - x^2 \quad \& \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

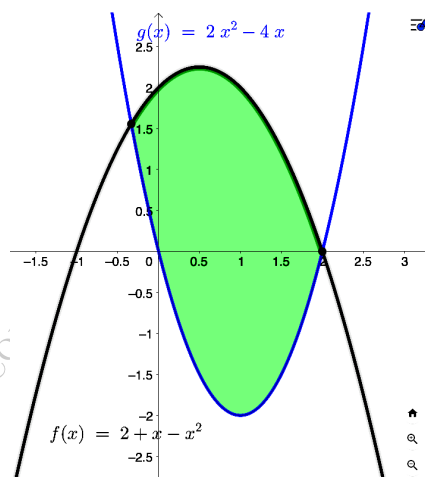
Sea la función:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x) \\ = -3x^2 + 5x + 2$$

$$h(x) = 0 \implies -3x^2 + 5x + 2 = 0 \implies x = \{-1/3, 2\}$$

que define un único recinto de integración $A = (-1/3, 2)$

$$A = \int_{-1/3}^2 h(x) dx = \int_{-1/3}^2 (-3x^2 + 5x + 2) dx \\ = -x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x \Big|_{-1/3}^2 = \frac{343}{54} \\ \text{Area} = |A| = \frac{343}{54} = 6.35 u^2$$



Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .
- (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.
- (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

$$\text{a) } r \equiv \begin{cases} R(-1, 0, -1) \\ \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El ángulo que forman la recta r y el plano π es el complementario del que forman los vectores $\vec{d}_r = (-2, 1, -1)$ y $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$

$$\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|-4 + 1 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{3} \implies \alpha = 19.47^\circ$$

b) Hallamos la intersección $P = r \cap \pi$

$$2 \cdot (-1 - 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \xrightarrow{\lambda=1} P(-3, 1, -2)$$

Para hallar el simétrico de P respecto del plano $\pi_1 = z - y = 0$, hallamos la recta $s \perp \pi_1 \mid P \in s$

$$s \equiv \begin{cases} P(-3, 1, -2) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_{\pi_1} = (0, -1, 1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto de intersección $O = s \cap \pi_1$ será:

$$-2 + \lambda - (1 - \lambda) = 0 \xrightarrow{\lambda=3/2} O(-3, -1/2, -1/2)$$

Y el simétrico P' del punto P respecto del plano π_1 será tal que:

$$O = M_{\overline{PP'}} = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P = 2 \cdot \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - (-3, 1, -2) \Rightarrow \boxed{P'(-3, -2, 1)}$$

b) La proyección de la recta r sobre el plano π será la recta t intersección del plano π y del plano π' perpendicular a π que contiene a la recta r .

$$\pi' \equiv \begin{cases} R(-1, 0, -1) \\ \vec{u} = \vec{d}_r = (-2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{n}_\pi = (2, 1, -1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' \equiv y + z + 1 = 0$$

$$\text{Y la recta } t = \pi \cap \pi' \implies t \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

- a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses?
¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
- b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
- c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción A)

Solución.

$X \equiv$ "Tiempo de vida de especie animal (meses)" & $X : \mathcal{N}(8.8, 3)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 10) &= P\left(Z > \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z < 0.4) \\ &= 1 - 0.6554 = 0.3446 = 34.46\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(7 < X < 10) &= P\left(\frac{7 - 8.8}{3} < Z < \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(-0.6 < Z < 0.4) \\ &= P(Z < 0.4) - P(Z < -0.6) = P(Z < 0.4) - P(Z > 0.6) \\ &= P(Z < 0.4) - [P(Z < 0.6)] = 0.6554 - (1 - 0.7257) \\ &= 0.3811 = 38.11\% \end{aligned}$$

b) $Y \equiv$ "Nº especímenes que no superan los 10 meses"

$$Y : \mathcal{B}(n, p) \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 4 \\ p = 1 - 0.3446 = 0.6554 \\ q = 0.3446 \end{array} \right\} \implies Y : \mathcal{B}(4, 0.6554)$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0.6554^0 \cdot 0.3446^4 = 0.9859$$

c) $P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0.98$

$$\begin{aligned} P(8.8 - c < X < 8.8 + c) &= P\left(\frac{8.8 - c - 8.8}{3} < Z < \frac{8.8 + c - 8.8}{3}\right) \\ &= P\left(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{3}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z > \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] \\ &= 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0.98 \implies P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.99 \\ &\xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{c}{3} = 2.325 \implies \boxed{c = 6.975} \end{aligned}$$

————— o —————

Junio 2021 - Ordinario

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} ax - 2y + (a - 1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned} \right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a .

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 3a^2 - 29a + 26 = 0 \implies a = \{1, 26/3\}$$

- Si $a \neq \{1, 26/3\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

- Si $a = 26/3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 23/3 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{368}{3} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

- b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \end{array} \right) \sim \left[F_2 + 2F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - 2 \cdot (-10 - 6\lambda) &= 4 & \Rightarrow & \begin{array}{l} x = -16 - 12\lambda \\ y = -10 - 6\lambda \\ z = \lambda \end{array} \\ \Rightarrow -y - 6\lambda &= 10 & \Rightarrow & \\ \Rightarrow z &= \lambda & \Rightarrow & \end{aligned}$$

————— o —————

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
- c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

- a) ■ Continuidad en $x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^x = 0$
- $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

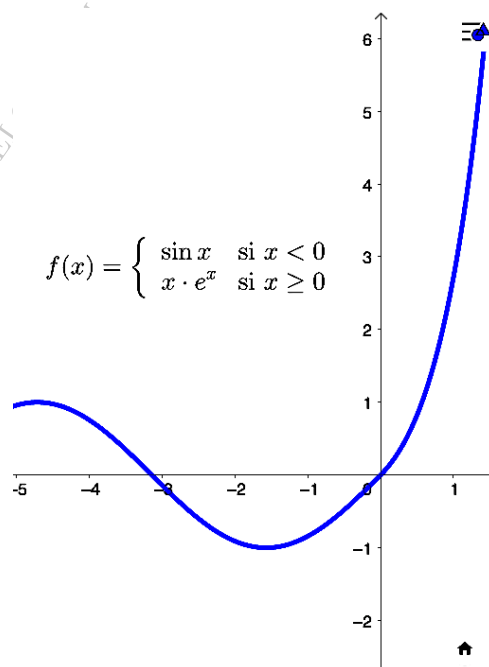
Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

- Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ (1+x) \cdot e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- $f'(0^-) = 1$
- $f'(0^+) = 1$

Como $f'(0^-) = f'(0^+)$ la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$



- b) Hallamos los puntos singulares en cada una de las ramas de la función restringido al intervalo $(-\pi, 2)$

$$f'_1(x) = \cos x = 0 \implies x = -\pi/2$$

$$f'_2(x) = (1+x) \cdot e^x = 0 \implies x = -1 < 0$$

Lo que define los intervalos $(-\pi, -\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ y $(0, 2)$

	$(-\pi, -\pi/2)$	$(-\pi/2, 0)$	$(0, 2)$
Signo $f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗

Por lo tanto $f(x)$ es *creciente* en $(-\pi/2, 2)$ y *decreciente* en $(-\pi, -\pi/2)$ y tiene un *mínimo relativo* en $(-\pi/2, -1)$.

Para demostrar que $\exists x_0 \in [0, 1] \mid f(x_0) = 2$ vamos a crear la función $g(x) = 2$ y la diferencia de ambas $h(x) = f(x) - g(x) = x \cdot e^x - 2$ y a hacer uso del *Teorema de Bolzano*.

$$\left. \begin{array}{l} h(x) \text{ es continua en } [0, 1] \\ h(0) = -2 < 0 \\ h(1) = e - 2 > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Bolzano}]{\text{Teorema}} \left\{ \begin{array}{l} \exists x_0 \in (0, 1) \mid h(x_0) = 0 \\ \implies f(x_0) - g(x_0) = 0 \\ \implies f(x_0) - 2 = 0 \implies f(x_0) = 2 \text{ q.e.d.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-\pi/2}^1 f(x) dx &= \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \int_0^1 f_2(x) dx = \int_{-\pi/2}^0 f_1(x) dx + \int_0^1 x \cdot e^x dx \\ &\stackrel{(*)}{=} -\cos x \Big|_{-\pi/2}^0 + (x-1) \cdot e^x \Big|_0^1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(*) \int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

- (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
- (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
- (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

- Llamamos $\pi \equiv x + y + D = 0$ al plano paralelo a π_1 pedido. Obligamos a que la distancia a $O(0, 0, 0)$ sea igual a 2.

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + D|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |D| = 2\sqrt{2} \implies D = \pm 2\sqrt{2}$$

Y los planos que cumplen las condiciones del enunciado serán:

$$\pi_3 = x + y + 2\sqrt{2} = 0 \quad \& \quad \pi_4 = x + y - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{b) } r \equiv \left\{ \begin{array}{l} R(0, 2, 0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \implies r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \pi_1 \cap OX \xrightarrow[z=0]{y=0} x = 1 \implies P(1, 0, 0)$$

$$\pi_1 \cap OY \xrightarrow[z=0]{x=0} y = 1 \implies Q(0, 1, 0)$$

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(-1, 1, 0)| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2} u$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es de 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

- a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
- b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
- c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 " y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?
- d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2021 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$N \equiv$ "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 "

$P \equiv$ "en un día se supera el nivel permitido de partículas"

Del enunciado tenemos:

$$P(N) = 0.16 \quad \& \quad P(P | N) = 0.33 \quad \& \quad P(P | \bar{N}) = 0.08$$

$$\text{a) } P(P | N) = \frac{P(P \cap N)}{P(N)} = \frac{P(P \cap N)}{0.16} = 0.33 \implies P(P \cap N) = 0.0528$$

$$\text{b) } P(P | \bar{N}) = \frac{P(P \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} = \frac{P(P) - P(P \cap N)}{1 - P(N)} = \frac{P(P) - 0.0528}{1 - 0.16} = 0.08$$

$$\implies P(P) = 0.12$$

$$P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P) = 0.16 + 0.12 - 0.0528 = 0.2272$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} P(N \cap P) = 0.0528 \\ P(N) \cdot P(P) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \end{array} \right\} \implies \left| \begin{array}{l} P(N \cap P) \neq P(N) \cdot P(P) \\ N \text{ y } P \text{ no son independientes} \end{array} \right|$$

$$\text{d) } P(N | \bar{P}) = \frac{P(N \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(N) - P(N \cap P)}{1 - P(P)} = \frac{0.16 - 0.0528}{1 - 0.12} = 0.1218$$

————— o —————