Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

SEPTIEMBRE 2017
(Coincidentes)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

27 de mayo de 2021

Septiembre 2017 (coincidentes)

Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *se pide:*

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ *en todo* $\mathbb{R}$.

b) Obtener la recta tangente a la curva $y = f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = -\pi$

c) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, luego continua si $x < 0$.
- Si $x > 0$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \cos 2x}{1} = 2$
  - $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x \cdot e^x + 2) = 2$
  - $f(0) = 0 \cdot e^0 + 2 = 2$

  Como $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $x_0 = -\pi \Rightarrow y_0 = f(-\pi) = 0$

$\Longrightarrow (x_0, y_0) = (-\pi, 0)$

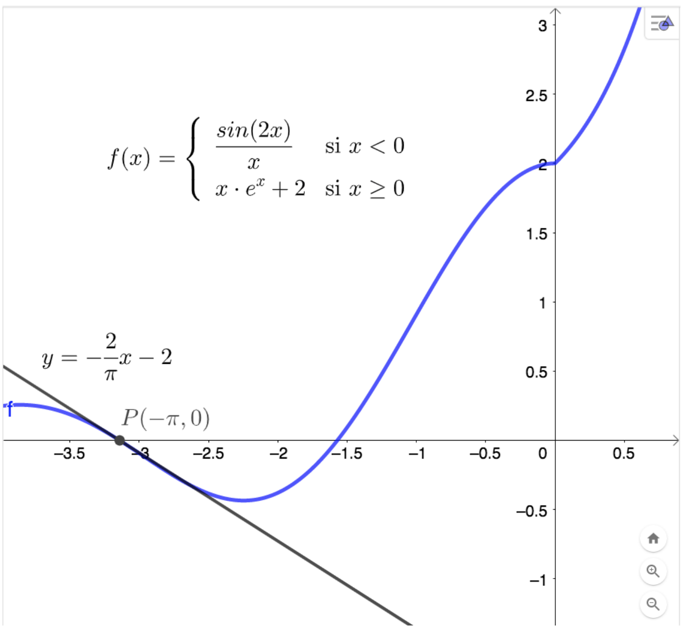
$$f'(x) = \frac{2x \cdot \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)}{x^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(-\pi) = -\frac{2}{\pi}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{2}{\pi} \cdot (x + \pi)$$

$$r \equiv y = -\frac{2}{\pi} \cdot x - 2$$



c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x\cdot e^x + 2)\,dx = \int_1^2 x\cdot e^x\,dx + \int_1^2 2\,dx$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = \ dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} = x\cdot e^x\big]_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx + 2x\big]_1^2 = x\cdot e^x - e^x + 2x\big]_1^2$$

$$= (x-1)\cdot e^x + 2x\big]_1^2 = \left(e^2+4\right) - 2 = e^2 + 2 \simeq 9.39$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $f(x) = \begin{cases} x+y=1 \\ ty+z=0 \\ x+(1+t)y+tz=t+1 \end{cases}$ *, se pide:*

a) *Discutirlo en función del parámetro* t.

b) *Resolverlo para* $t=0$.

c) *Resolverlo para* $t=-1$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = t^2 - t = t\cdot(t-1) = 0 \implies t = \{0,1\}$$

- Si $t \neq \{0,1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $t = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $t=1 \implies A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^{*})=3$

  $\operatorname{ran}(A)=2 \neq \operatorname{ran}(A^{*})=3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $t=0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+\lambda=1 \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow z=0 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x=1-\lambda & \\ y=\lambda & ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 & \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $t=-1$, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=0 \\ \Rightarrow -y+\frac{1}{2}=0 \\ \Rightarrow -2z=-1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=1/2 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} C_2 \leftrightarrow C_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1+t & t+1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & t & t \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\sim} \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3-t\cdot F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -t^2+t & t \end{array}\right) \implies -t^2+t=0 \implies t=\{0,1\}$$

- Si $t \neq \{0,1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado

- Si $t=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

- Si $t=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

b) Resolvemos el sistema para $t=0$. Como hemos intercambiado $C_2 \leftrightarrow C_3$, las incóginitas han quedado intercambiadas $y \leftrightarrow z$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+\lambda=1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x=1-\lambda & \\ y=\lambda & ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 & \end{array}}$$

c) Sustituimos $t=-1$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior. Como hemos intercambiado $C_2 \leftrightarrow C_3$, las incóginitas han quedado intercambiadas $y \leftrightarrow z$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z-\frac{1}{2}=0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y=-1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x={}^1\!/_2 \\ y={}^1\!/_2 \\ z={}^1\!/_2 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x+y-z=1 \quad \& \quad \pi_2 \equiv x+2y+z=3$$

se pide:

a) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Sea $P(x,y,z)$. El lugar geométrico de los puntos tales que $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$ será:

$$\frac{|2x+y-z-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|x+2y+z-3|}{\sqrt{1+4+1}} \Longrightarrow |2x+y-z-1| = |x+2y+z-3|$$

$$\begin{cases} 2x+y-z-1 = x+2y+z-3 & \Longrightarrow \boxed{\pi_3 \equiv x-y-2z+2=0} \\ 2x+y-z-1 = -x-2y-z+3 & \Longrightarrow \boxed{\pi_4 \equiv 3x+3y-4=0} \end{cases}$$

b) $$r \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-3,3) \approx (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

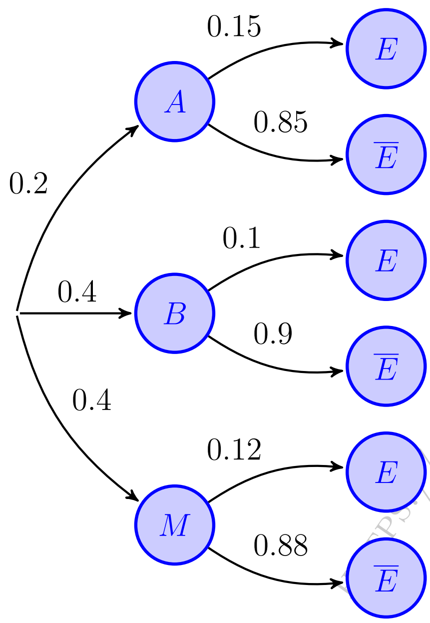
Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, B y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca B. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca B y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

a) Determinar la probablidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.



Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{El móvil es de la marca A}$$
$$B \equiv \text{El móvil es de la marca B}$$
$$M \equiv \text{El móvil es de la marca M}$$
$$E \equiv \text{El móvil tiene software espía}$$

a) $P(E) = P(A\cap E) + P(B\cap E) + P(M\cap E)$
$= P(A)\cdot P(E \mid A) + P(B)\cdot P(E \mid B)$
$+ P(M)\cdot P(E \mid M) = 0.2\cdot 0.15$
$+ 0.4\cdot 0.1 + 0.4\cdot 0.12 = 0.118$

b) $P(A \mid E) = \dfrac{P(A\cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(A)\cdot P(E \mid A)}{P(E)}$
$= \dfrac{0.2\cdot 0.15}{0.118} = 0.254$

Septiembre 2017 (coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) *Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.*

b) *Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x+y-z+3=0$.*

c) *Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

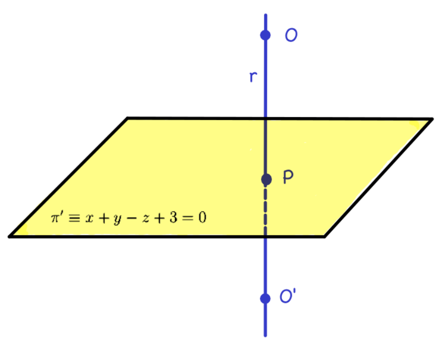
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,-1,0) \qquad \& \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = (3,-4,-2)$$

a) $$\pi \equiv \begin{cases} P_1(1,1,3) \\ P_2(0,0,3) \\ P_3(4,-3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P_1(1,1,3) \\ \vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \left[\overrightarrow{P_1X}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(x-1) - 2\cdot(y-1) + 7\cdot(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-2y+7z-21=0$$

b)
- Hallamos $r \perp \pi' \mid O \in r$

$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_{\pi'} = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$



- $P = r \cap \pi'$

$$\lambda + \lambda + \lambda + 3 = 0 \xrightarrow{\lambda=-1} P(-1,-1,1)$$

- $P = M_{\overline{OO'}} = \dfrac{O+O'}{2}$

$$O' = 2P - O \Longrightarrow O'(-2,-2,2)$$

c) Sean los vectores $\overrightarrow{OP_1} = (1,1,3)$ & $\overrightarrow{OP_2} = (0,0,3)$ & $\overrightarrow{OP_3} = (4,-3,1)$

$$Vol_{OP_1P_2P_3} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot|21| = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\,u^3$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$*, se considera la matriz* B *formada por las tres últimas columnas de* A *y se pide:*

a) Estudiar para qué valores del parámetro real a *la matriz* B *es invertible.*

b) Obtener el rango de A *en función de los valores del parámetro real* a*.*

c) Resolver el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, en el caso* $a = 0$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & a \\ 0 & 5 & 2a \\ 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} \Longrightarrow |B| = 0 \ \forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

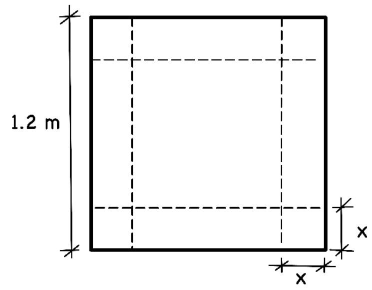
b) $$\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{bmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{ran}(A) = 2 \ \forall a \in \mathbb{R}$$

c) Como $\nexists B^{-1}$ no podemos resolver la ecuación matrical, así que resolvemos el S.C.I. resultante de sustituir en la matriz B el valor de $a = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -x + 7 \cdot \frac{1}{5} = 1 \\ \Rightarrow 5y = 1 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = 1/5 \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

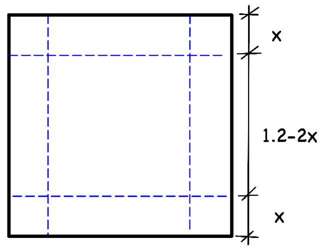
Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1.2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

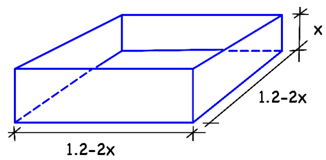
Solución.



$$V(x) = (1.2 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4.8x^2 + 1.44x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 9.6x + 1.44 = 0 \implies \begin{cases} x = 0.6 \\ x = 0.2 \end{cases}$$

$$V''(x) = 24x - 9.6 \implies \begin{cases} V''(0.6) = 5.2 > 0 \xrightarrow{(\cup)} Min \\ V''(0.2) = -4.8 < 0 \xrightarrow{(\cap)} Max \end{cases}$$



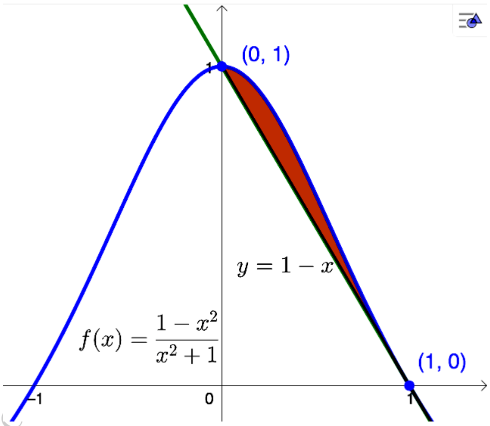
El volumen máximo se produce para unas dimensiones de la caja de $0.8 \times 0.8 \times 0.2$ y es igual a $V(0.2) = 0.128\,m^3$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, *calcúlese el área comprendida entre la curva* $y = f(x)$ *y la recta* $y = 1 - x$.
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)*

Solución.

Llamamos $g(x) = 1 - x$ a la recta.



$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1} - (1-x) \\ &= \frac{1-x^2+x^3-x^2+x-1}{x^2+1} = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+1} \\ h(x) = 0 &\Longrightarrow x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x-1)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow x = \{0, 1\} \end{aligned}$$

Lo que define una región $A_1 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+1}\,dx \overset{\circledast}{=} \int_0^1 (x-2)\,dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= \left.\frac{x^2}{2} - 2x + 2\cdot\arctan x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi-3}{2} \\ Area &= |A_1| = \frac{\pi-3}{2} \simeq 0.07\,u^2 \end{aligned}$$

$\circledast$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + x & x^2+1 \\ -x^3 \qquad\quad - x & x - 2 \\ \hline -2x^2 \qquad\quad & \\ 2x^2 \qquad + 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$