

MATEMÁTICAS II  
EXÁMENES RESUELTOS  
PAU Y EVAU

JUNIO 2016  
(COINCIDENTES)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

11 de mayo de 2021

# Junio 2016 (Coincidentes)

## OPCIÓN A

### Ejercicio 1 (3 puntos)

Dadas las rectas  $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$ , se pide:

- Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.
- Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a  $r_1$  y a  $r_2$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

### Solución.

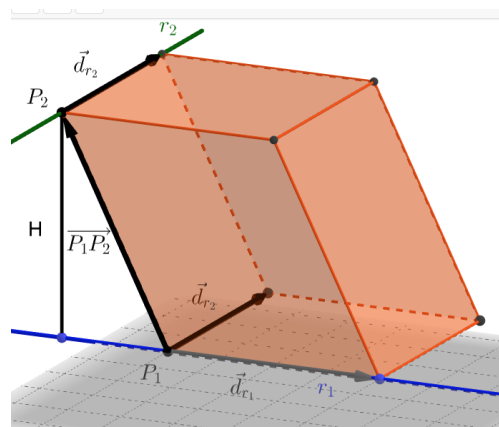
$$r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} R_1(-1, 2, 0) \\ \vec{d}_{r_1} = (1, -3, 1) \end{cases} \quad \& \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} R_2(4, -3, 0) \\ \vec{d}_{r_2} = (5, 4, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_1 R_2} = (5, -5, 0)$$

$$a) \quad [\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{R_1 R_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

$$Vol = A_{base} \cdot H \implies d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{|[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{R_1 R_2}]|}{|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}|} = \frac{|-55|}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{55}{|(-7, 4, 19)|} = \frac{55}{\sqrt{426}} u$$



- b) La recta  $s$  que pasa por  $O(0, 0, 0)$  y corta a  $r_1$  y a  $r_2$ :

- Si la recta  $s$  corta a  $r_1$  y  $O \in s$ , estará en un plano  $\pi_1$  que contenga a  $O$  y a  $r_1$ .
- Si la recta  $s$  corta a  $r_2$  y  $O \in s$ , estará en un plano  $\pi_2$  que contenga a  $O$  y a  $r_2$ .

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{u} = \vec{d}_{r_1} = (1, -3, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OR_1} = (-1, 2, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 \equiv 2x + y + z = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ \vec{u} = \vec{d}_{r_2} = (5, 4, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OR_2} = (4, -3, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_2 \equiv 3x + 4y - 31z = 0$$

De esta forma la recta  $s$  pedida será la intersección de ambos planos:

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - 31z = 0 \end{cases}$$

### Ejercicio 2 (3 puntos)

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- Determinar los valores del parámetro  $a$ , para que se verifique la igualdad  $A^2 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.
- Para  $a = 2$ , resolver la ecuación matricial  $AXA^{-1} = B$ .
- Calcular el determinante de la matriz  $(2B)^{-1}$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

### Solución.

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_I \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$$

$$b) AXA^{-1} = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_I X \underbrace{A^{-1}A}_I = A^{-1}BA \Rightarrow X = A^{-1}BA$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad |A| = -2 \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^T \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|2B^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{2^3 \cdot |B|} = \frac{1}{8 \cdot |B|} = \frac{1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}$$

### Ejercicio 3 (2 puntos)

Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?

Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

#### Solución.

Sean  $x$  el precio de la papeleta y  $f(x)$  la recaudación de la rifa. Hemos de encontrar el beneficio máximo teniendo en cuenta:

- El coste del portátil que se rifará es de 600 euros.
- Si  $x = 2$  se venderían 5000 papeletas.
- Por cada incremento de 1 euro en el precio se venden 500 papeletas menos. Luego se reducirá el número de papeletas vendidas en  $500 \cdot (x - 2)$ .

Por tanto el número de papeletas vendidas será  $5000 - 500 \cdot (x - 2) = 6000 - 500x$

Y la recaudación  $f(x)$  será el número de papeletas vendidas por el precio de cada papeleta:

$$f(x) = (6000 - 500x) \cdot x = -500x^2 + 6000x$$

Para hallar el máximos de la función:

$$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \implies x = 6$$

$$f''(x) = -1000 \implies f''(6) = -1000 < 0 \stackrel{(\text{n})}{\implies} \text{Máximo en } x = 6$$

Luego la máxima recaudación se obtendrá vendiendo las entradas a un precio de 6 euros y ascenderá a  $f(6) = 18000$  euros.

Si descontamos el coste del ordenador rifado se podrá donar a la ONG la cantidad de  $18000 - 600 = 17400$  euros.

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

#### Ejercicio 4 (2 puntos)

Se consideran las funciones  $f(x) = 2 + x - x^2$  y  $g(x) = \frac{2}{x+1}$ , definida para  $x \neq -1$ .  
Se pide:

- a) Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ .
- b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot g(x)$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A - Coincidentes)

#### Solución.

a)  $h(x) = f(x) - g(x) = 2 + x - x^2 - \frac{2}{x+1} = \frac{-x^3 + 3x}{x+1}$

$$h(x) = 0 \implies -x^3 + 3x = x \cdot (-x^2 + 3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

El área del primer cuadrante será por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-x^3 + 3x}{x+1} dx \stackrel{\odot}{=} \int_0^{\sqrt{3}} (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2}{x+1} dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 2 \cdot \ln|x+1| \right]_0^{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} - 2 \cdot \ln|\sqrt{3}+1| \\ &\approx 1,22 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$\odot$

$$\begin{array}{r} \frac{-x^2 + x + 2}{x+1} - \frac{x^3}{x^3 + x^2} + \frac{3x}{x^3 + x^2} \\ \hline \frac{x^2 + 3x}{x^3 + x^2} \\ \frac{-x^2 - x}{x^3 + x^2} \\ \hline \frac{2x}{x^3 + x^2} \\ \frac{-2x - 2}{x^3 + x^2} \\ \hline \frac{-2}{x^3 + x^2} \end{array}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 + 2x - 2x^2}{x+1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} -2 \cdot (x-2) = 6$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

# Junio 2016 (Coincidentes)

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 (3 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \\ ax + 4y + 2z = a \end{cases}$$

se pide:

- a) Discutirlo según los valores del parámetro  $a$ .
- b) Resolverlo, si es posible, para  $a = 1$ .
- c) Resolverlo, si es posible, para  $a = -1$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

**Solución.**

#### MÉTODO DE ROUCHÉ

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$|A| = -5a^2 + a + 6 = -(a+1) \cdot (5a-6) = 0 \implies a = \{-1, 6/5\}$$

- Si  $a \neq \{-1, 6/5\}$   $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

- Si  $a = -1 \implies A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

$$\blacksquare \text{ Si } a = 6/5 \implies A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 6/5 & 0 \\ 4 & 2 & 6/5 \end{vmatrix} = -\frac{66}{25} \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$$

- b) Resolvemos el sistema para  $a = 1$  por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.D. también podríamos haber optado por el método de Crámer, con la ventaja de conocer que  $|A| = -5a^2 + a + 6 = 2$

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \begin{bmatrix} 2F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + \lambda = 1 \\ x - 0 + 1 = 0 \\ 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}}$$

- c) Resolvemos el sistema para  $a = -1$  por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} F_2 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x + \frac{-1-\lambda}{5} - \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1+6\lambda}{5}} \\ &\Rightarrow 5y + \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1-\lambda}{5}, \lambda \in \mathbb{R}} \\ &\Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \boxed{z = \lambda} \end{aligned}$$

## MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left( \begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2 \end{bmatrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 4 & 2 & a & a \end{array} \right) \sim \begin{bmatrix} F_2 + F_1 \\ F_3 + 4F_1 \end{bmatrix} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 6 & 5a & a \end{array} \right) \stackrel{a \neq -1}{\sim} \begin{bmatrix} (a+1) \cdot F_3 - 6F_2 \end{bmatrix} \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a+1) \cdot (5a-6) & a \cdot (a+1) \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} (a+1) \cdot (5a-6) = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 6/5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Si } a \neq \{-1, 6/5\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE DETERMINADO}$$

- Si  $a = -1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO}$
- Si  $a = 6/5 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 0 & 11/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. INCOMPATIBLE}$

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor  $a = 1$ . Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas  $C_1 \leftrightarrow C_3$  y  $C_1 \leftrightarrow C_2$ , las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas  $y, z, x$ .

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -y + 1 - 1 = 0 \\ 2z + 2 \cdot (-1) = 0 \\ -2x = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = -1 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor  $a = -1$  en el sistema obtenido antes de la última operación de filas (sólo válida si  $a \neq -1$ ). Hay que tener en cuenta que como hemos cambiado las columnas  $C_1 \leftrightarrow C_3$  y  $C_1 \leftrightarrow C_2$ , las incógnitas han quedado intercambiadas de igual manera, luego las columnas corresponden a las incógnitas  $y, z, x$ .

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} -y + \lambda - \frac{1+6\lambda}{5} = 0 \\ 6\lambda - 5x = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = \frac{-1-\lambda}{5} \\ z = \lambda \\ x = \frac{1+6\lambda}{5} \end{array}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_



**Ejercicio 2 (3 puntos)**

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x-4} + 2x - 1 & , \text{ si } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ si } x = 2 \end{cases}$ , se pide:

- a) Hallar las asíntotas de la curva  $y = f(x)$ .  
 b) Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de  $y = f(x)$ .  
 c) Calcular  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

**Solución.** Reescribimos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 10x + 13}{2 \cdot (x - 2)} & , \text{ si } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

- a) ■ **A. Vertical** Buscamos las A. Verticales entre las raíces del denominador.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 10x + 13}{2x - 4} = \left[ \frac{9}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[ \frac{9}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[ \frac{9}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \text{ A. Horizontal } y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 10x + 13}{2x - 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists \text{ A.H.}$$

- **A. Oblicua** Será una recta de la forma:  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 10x + 13}{2x^2 - 4x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{4x^2 - 10x + 13}{2x - 4} - 2x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 10x + 13 - 4x^2 + 8x}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + 13}{2x - 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = -1$$

Luego hay una asíntota oblicua en  $y = 2x - 1$

- b) Hallamos los puntos singulares

$$f'(x) = \frac{(8x - 10) \cdot 2 \cdot (x - 2) - (4x^2 - 10x + 13) \cdot 2}{4 \cdot (x - 2)^2} = \frac{16x^2 - 52x + 40 - 8x^2 + 20x - 26}{4 \cdot (x - 2)^2} \\ = \frac{8x^2 - 32x + 14}{4 \cdot (x - 2)^2} = \frac{2 \cdot (4x^2 - 16x + 7)}{4 \cdot (x - 2)^2} = \frac{4x^2 - 16x + 7}{2 \cdot (x - 2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 7/2 \end{cases}$$

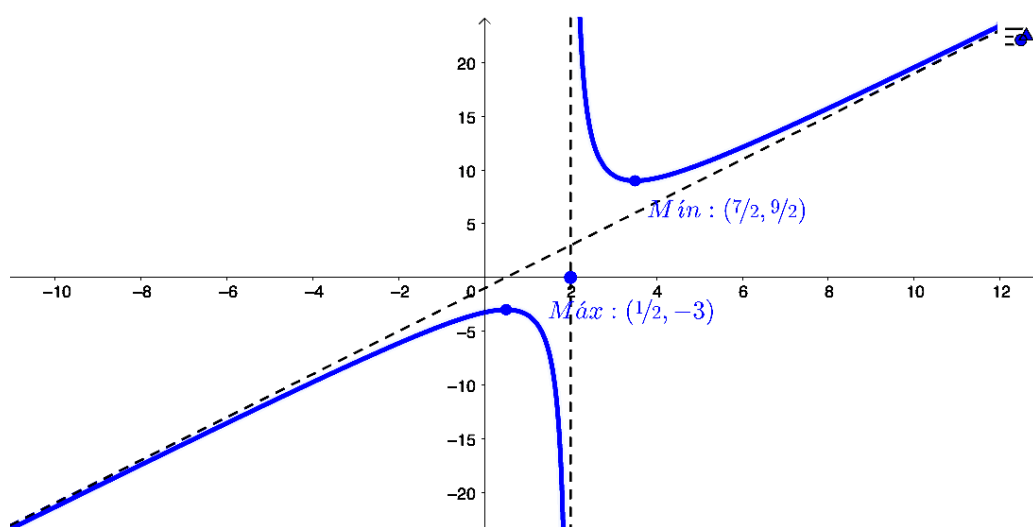
|               | $(-\infty, 1/2)$          | $(1/2, 7/2)$            | $(7/2, +\infty)$          |
|---------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| Signo $f'(x)$ | -                         | +                       | -                         |
| $f(x)$        | Decreciente<br>$\searrow$ | Creciente<br>$\nearrow$ | Decreciente<br>$\searrow$ |

Luego la función  $f(x)$  es *creciente* en  $(1/2, 7/2)$  y *decreciente* en  $(-\infty, 1/2) \cup (7/2, +\infty)$  y tiene un *mínimo relativo* en  $(1/2, -3)$  y un *máximo relativo* en  $(7/2, 9)$ .

$$f''(x) = \frac{(8x - 16) \cdot 2 \cdot (x - 2)^2 - (4x^2 - 16x + 7) \cdot 4 \cdot (x - 2)}{4 \cdot (x - 2)^3}$$

$$= \frac{\cancel{16x^2} - \cancel{64x} + 64 - \cancel{16x^2} + \cancel{64x} - 28}{4 \cdot (x - 2)^3} = \frac{36}{4 \cdot (x - 2)^3} = \frac{9}{(x - 2)^3} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ P.I.}$$

|                | $(-\infty, 2)$    | $(2, +\infty)$    |
|----------------|-------------------|-------------------|
| Signo $f''(x)$ | -                 | +                 |
| $f(x)$         | Cóncava<br>$\cap$ | Convexa<br>$\cup$ |



Para el cálculo de la integral utilizaremos la función tal y como nos la dieron en el enunciado, ya que de esta forma es más sencilla su integración.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \left( \frac{9}{2x-4} + 2x - 1 \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{9}{2x-4} dx + \int_{-1}^1 (2x - 1) dx \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{2}{2x-4}}_{\frac{u'}{u}} dx + x^2 - x \Big|_{-1}^1 = \frac{9}{2} \cdot \ln |2x - 4| + x^2 - x \Big|_{-1}^1 \\ &= \left( \frac{9}{2} \cdot \ln |-2| + 1 - 1 \right) - \left( \frac{9}{2} \cdot \ln |-6| + 1 + 1 \right) = \frac{9}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 6) - 2 \\ &= \frac{9}{2} \ln \frac{2}{6} - 2 = \frac{9}{2} \cdot \ln \frac{1}{3} - 2 = -\frac{9}{2} \cdot \ln 3 - 2 \simeq -6.94 \end{aligned}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

**Ejercicio 3 (2 puntos)**

Dados el plano  $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$ , el punto  $A(1, 1, 3)$  y la recta  $r \equiv x = y - 2 = \frac{z}{2}$ , se pide.

a) Hallar la distancia del punto  $A$  a la recta  $r$ .

b) Hallar la proyección del punto  $A$  sobre el plano  $\pi$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

**Solución.**

$$r \equiv \begin{cases} R(0, 2, 0) \\ \vec{d}_r = (1, 1, 2) \end{cases} \quad \& \quad A(1, 1, 3) \quad \& \quad \overrightarrow{RA} = (1, -1, 3)$$

$$\text{a) } d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{RA} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|(-5, 1, 2)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} \, u$$

b) Hallaremos una recta  $s \perp \pi$ , que pase por el punto  $A$ . La proyección  $A' = s \cap \pi$ .

$$s \equiv \begin{cases} A(1, 1, 3) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1, -1, 2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Sea  $A'(1 + \lambda, 1 - \lambda, 3 + 2\lambda)$  el punto de intersección  $s \cap \pi$

$$(1 + \lambda) - (1 - \lambda) + 2 \cdot (3 + 2\lambda) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + 6\lambda = 0 \xRightarrow{\lambda = -3/2} \boxed{A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

#### Ejercicio 4 (2 puntos)

Dada una recta  $r$  cuyo vector director es  $\vec{v} = (a, b, c)$ , con  $a, b, c > 0$ , se pide:

- a) Si  $r$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$  con el eje  $OX$  y de  $\frac{\pi}{4}$  con el eje  $OY$ , determinar el ángulo que forma la recta con el eje  $OZ$ .
- b) Si  $\vec{v} = (1, 5, 3)$ , hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto  $A(3, 0, 1)$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B - Coincidentes)

#### Solución.

- a) Sean los vectores directores de los ejes:

$$\vec{d}_{OX} = (1, 0, 0) \quad \& \quad \vec{d}_{OY} = (0, 1, 0) \quad \& \quad \vec{d}_{OZ} = (0, 0, 1)$$

y sea  $\vec{d}_r = (a, b, c)$  que suponemos unitario  $\Rightarrow |\vec{d}_r| = 1$

$$\cos(\widehat{r, OX}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_{OX}|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_{OX}|} = \frac{|a|}{1 \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = a$$

$$\cos(\widehat{r, OY}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_{OY}|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_{OY}|} = \frac{|b|}{1 \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = b$$

$$|\vec{d}_r| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + c^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

luego el vector director de  $r$  será  $\vec{d}_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\cos(\widehat{r, OZ}) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_{OZ}|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_{OZ}|} = \frac{|c|}{1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{r, OZ}) = \frac{\pi}{3}$$

Otra forma de resolver el ejercicio supone saber que si  $\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos que forma un vector con los ejes coordenados se cumple que:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \\ \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \gamma &= 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma &= 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

- b) Hallamos el plano  $\pi$  perpendicular a la recta cuyo vector director es  $\vec{v} = (1, 5, 3)$  y que pasa por el punto  $A(3, 0, 1)$ .

$$\pi \equiv \begin{cases} A(3, 0, 1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{v} = (1, 5, 3) \end{cases} \Rightarrow x + 5y + 3z + D = 0 \xrightarrow{A \in r} D = -6 \Rightarrow \pi \equiv x + 5y + 3z - 6 = 0$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_