

MATEMÁTICAS II  
EXÁMENES RESUELTOS  
PAU Y EVAU

JUNIO 2018 - COINCIDENTES  
(ORDINARIO)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

9 de abril de 2021

# Junio 2018 (Coincidentes)

## OPCIÓN A

### Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ , y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  se pide:

a) Calcular  $A^T A$  y  $AA^T$ , donde  $A^T$  denota la matriz traspuesta de  $A$ .

b) Hallar  $A^{-1}$  y resolver el sistema lineal  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

c) Calcular  $C^2$ , donde  $C = ABA^T$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

### Solución.

Antes de empezar escribimos  $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  para que nos resultará más fácil operar con ella.

a)

$$A^T A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

$$AA^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

b) Dado que  $A^T A = AA^T = I \implies A^{-1} = A^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Llamamos  $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y resolvemos  $AX = D \implies X = A^{-1} \cdot D$

$$X = A^{-1} \cdot D = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

c)  $C^2 = (ABA^T)^2 = AB \underbrace{A^T \cdot A}_I BA^T = AB^2 A^T = A \cdot (2I)^2 \cdot A^T = A \cdot 4I \cdot A^T$

$$= 4 \underbrace{AA^T}_I = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

## Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dada la función  $f(x) = 3x^2 \cdot e^{-x}$ , se pide:

a) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

b) Calcular  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$ .

c) Calcular los límites:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

### Solución.

$$a) f'(x) = 6x \cdot e^{-x} - 3x^2 \cdot e^{-x} = (6x - 3x^2) \cdot e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

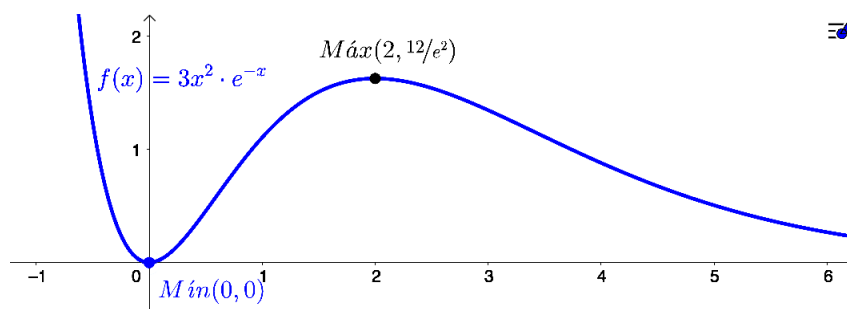
La función  $f(x)$  es *creciente* en  $(0, 2)$  y *decreciente* en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  y tiene un *mínimo relativo* en  $(0, 0)$  y un *máximo relativo* en  $(2, 12/e^2)$

$$\begin{aligned} b) \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx &= \int_0^1 \frac{3x^2 \cdot e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 3x \cdot e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 3x & \Rightarrow du = 3 dx \\ dv = e^{-x} dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \\ &= -3x \cdot e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 3e^{-x} dx = -3x \cdot e^{-x} - 3e^{-x} \Big|_0^1 = -3e^{-x} \cdot (x + 1) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{6}{e} + 3 = \frac{-6 + 3e}{3} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$



### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Se consideran los puntos  $P(1, 1, 1)$ ,  $Q(1, 0, 1)$ ,  $R(0, 0, 1)$  y la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(0, 0, -1)$  y  $B(0, 1, 0)$ . Se pide:

- Encontrar el punto de intersección de  $r$  con el plano que contiene a  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .
- Hallar un punto  $T$  de  $r$ , tal que los vectores  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PR}$ ,  $\overrightarrow{PT}$  sean linealmente dependientes.
- Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son  $O(0, 0, 0)$  y los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

**Solución.**

$$\text{a) } r \equiv \begin{cases} A(0, 0, -1) \\ B(0, 1, 0) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} A(0, 0, -1) \\ \vec{d}_r = (0, 1, 1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1, 1, 1) \\ Q(1, 0, 1) \\ R(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi \equiv [\overrightarrow{RX}, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}] = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi \equiv z-1=0$$

$$S = r \cap \pi \implies -1 + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 2 \implies \boxed{S(0, 2, 1)}$$

- b) Piden hallar un punto  $T \in r$  de manera que los vectores  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PR}$ ,  $\overrightarrow{PT}$  sean linealmente dependientes, es decir, de forma que  $[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PT}] = 0 \implies T \in \pi$ . Por tanto  $T = r \cap \pi \implies T(0, 2, 1)$ .

$$\text{c) } V_{OPQR} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-1| = \frac{1}{6} u^2$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

#### Ejercicio 4 (2.5 puntos)

La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

- a) No le gusten las películas de acción.
- b) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.
- c) Le guste el cine de acción y el de suspense.
- d) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A - Coincidentes)

#### Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$  "Al socio le gustan las películas de acción"

$S \equiv$  "Al socio le gustan las películas de suspense"

Vamos a resolver el ejercicio mediante una tabla de contingencia, que es muy adecuada cuando nos dan números en lugar de probabilidades.

	A	$\bar{A}$	Total
S	60	75	135
$\bar{S}$	90	75	165
Total	150	150	300

a)  $P(\bar{A}) = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$

b)  $P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = \frac{150 + 135 - 60}{300} = \frac{225}{300} = \frac{3}{4}$

c)  $P(A \cap S) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$

d)  $P(A \cap \bar{S}) = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

# Junio 2018 (Coincidentes)

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{cases} 10x - 20y - 10z = 8\alpha + 44 \\ 2x - 5y + 3z = 4\alpha + 4 \\ 3x - 7y + 2z = 5\alpha + 9 \end{cases},$$

se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real  $\alpha$ .
- Resolver el sistema para  $\alpha = -3$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

**Solución.**

#### MÉTODO DE ROUCHÉ

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array} \right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$|A| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 5\alpha + 9 \end{vmatrix} = (4\alpha + 22) + 5 \cdot (4\alpha + 4) - 5 \cdot (5\alpha + 9) \\ = -3 - \alpha = 0 \implies \alpha = -3$$

- Si  $\alpha \neq -3 \implies \text{ran} A = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$  (No tiene solución).
- Si  $\alpha = -3 \implies \text{ran} A = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} = 3 \xrightarrow{\text{Rouche}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}$  (Infinitas soluciones).

- b) Resolvemos el sistema para  $\alpha = -3$  por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones

correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 2 & -5 & 3 & -8 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{c} 5F_2 - 2F_1 \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5x - 10 \cdot (12 + 5\lambda) - 5\lambda &= 10 & \Rightarrow x = 26 + 11\lambda \\ \Rightarrow -5y + 25\lambda &= -60 & \Rightarrow y = 12 + 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z &= \lambda & \Rightarrow z = \lambda \end{aligned}$$

### MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array} \right) \sim \left[ \begin{array}{c} 5F_2 - 2F_1 \\ 5F_3 - 3F_1 \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha - 24 \\ 0 & -5 & 25 & 13\alpha - 21 \end{array} \right)$$

$$\sim \left[ \begin{array}{c} F_3 - F_2 \end{array} \right] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 4\alpha + 22 \\ 0 & -5 & 25 & 12\alpha - 24 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + 3 \end{array} \right) \Rightarrow \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$$

▪ Si  $\alpha \neq -3 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & \square \\ 0 & -5 & 25 & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. INCOMPATIBLE}$

▪ Si  $\alpha = -3 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMP. INDETERMINADO}$

- b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor  $\alpha = -3$ .

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 25 & -60 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 12 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + (-2) \cdot (12 + 5\lambda) - \lambda &= 2 & \Rightarrow x = 26 + 11\lambda \\ \Rightarrow y - 5\lambda &= 12 & \Rightarrow y = 12 + 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow z &= \lambda & \Rightarrow z = \lambda \end{aligned}$$

————— ○ —————

## Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable,  $x$ , de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

- Determinar el precio del frasco de perfume en el caso  $x = 0$  (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).
- Expresar en función de  $x$  el precio del frasco que contiene  $12 + x$  ml de mezcla.
- Deducir con qué valor de  $x$  el precio de la mezcla se hace cero.
- Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de  $x$  para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

### Solución.

- Cuando  $x = 0$  (no se añade alcohol) el precio del perfume será:  $48 \cdot 12 = 576$  €
- El precio del perfume será igual a la cantidad de perfume en mililitros por el precio de cada ml.

$$f(x) = (12 + x) \cdot (48 - 3x) = -3x^2 + 12x + 576$$

$$\text{c) } f(x) = 0 \implies -3x^2 + 12x + 576 \implies x = \begin{cases} x = -12 \\ x = 16 \end{cases}$$

$$\text{d) } f'(x) = 0 \implies -6x + 12 = 0 \implies x = 2$$

$$f''(x) = -6 \implies f''(2) = -6 < 0 \stackrel{(\text{n})}{\implies} \text{Mínimo en } x = 2$$

Por tanto se produce un máximo en el precio del perfume para  $x = 2$  ml de alcohol añadido y tiene un valor de  $f(2) = 588$  €

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_



### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dadas las rectas  $r \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ ,  $s \equiv \begin{cases} -x + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$  y el punto

$P(-1, 2, -1)$ , se pide:

- Determinar la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .
- Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por  $P$  y es paralelo a  $r$  y a  $s$ .
- Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto  $P$  y el punto  $P'$ , proyección de  $P$  sobre el plano  $z = 0$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

$$r \equiv \begin{cases} R(-2, -3, 0) \\ \vec{d}_r = (0, 2, -1) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(3, -1, 0) \\ \vec{d}_s = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1) \end{cases}$$

**Solución.**

a)  $\vec{RS} = (5, 2, 0)$

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{RS}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b)  $\pi \equiv [\vec{PX}, \vec{d}_r, \vec{d}_s] = 0 \implies \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\implies \pi \equiv -(x+1) + (y-2) + 2 \cdot (z+1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x - y - 2z + 1 = 0}$$

- c) Para hallar la proyección  $P'$  del punto  $P$  sobre el plano  $\pi' \equiv z = 0$  seguiremos el procedimiento general, aunque proyectar sobre el plano coordenado  $z = 0$  se reduce simplemente a sustituir en el punto  $P$  la coordenada  $z$  por 0, luego  $P'(-1, 2, 0)$

$$t \equiv \begin{cases} t \perp \pi' \implies \vec{d}_t = \vec{n}_{\pi'} = (0, 0, 1) \\ P(-1, 2, -1) \in t \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P' = t \cap \pi' \implies -1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies P'(-1, 2, 0)$$

$$Area_{\triangle OPP'} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OP} \times \overline{OP'}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \|(2, 1, 0)\| = \frac{\sqrt{5}}{2} u^2$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

**Ejercicio 4 (2.5 puntos)**

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son  $P(A) = 0.6$  y  $P(B) = 0.2$ . Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B) \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) \quad P(\overline{A} \cap B) \quad P(\overline{A} \mid B)$$

Nota:  $\overline{S}$  denota el suceso complementario de  $S$ .

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B - Coincidentes)

**Solución.**

$$P(A) = 0.6 \quad \& \quad P(B) = 0.2 \quad \& \quad P(A \cap B) \stackrel{A, B \text{ indep.}}{=} P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$$

$$\text{a) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.2 - 0.12 = 0.68$$

$$\text{b) } P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = 0.88$$

$$\text{c) } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.68 = 0.32$$

$$\text{d) } P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.12 = 0.08$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_