Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

SEPTIEMBRE 2017
(Extraordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

13 de abril de 2021

Septiembre 2017
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, *donde* ln *significa logaritmo neperiano, se pide:*

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ *en* $x = 0$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a)
- Continuidad en $x = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} xe^{2x} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$
  - $f(0) = \dfrac{\ln(0+1)}{0+1} = 0$

  Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ la función $f(x)$ es *continua* en $x = 0$.
- Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)\cdot e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \blacksquare\ f'(0^-) = 1 \\ \blacksquare\ f'(0^+) = 1 \end{array}$$

Como $f'(0^-) = f'(0^+)$ la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2e^{2x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} xe^{2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\cdot e^{2x} \end{array} \right\}$

$$= \frac{x}{2}\cdot e^{2x}\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}\cdot e^{2x}\Big]_{-1}^{0} = \frac{e^{2x}}{4}\cdot(2x-1)\Big]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2} = \frac{3-e^2}{4e^2}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ *y* $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Estudiar la posición relativa de r_1 *y* r_2*.*

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 *y al punto* $P(1,2,3)$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a)

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} R_1(0,-1,0) \\ \vec{d}_{r_1} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-8,-4) \approx (1,4,2) \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} R_2(1,0,0) \\ \vec{d}_{r_2} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-18,-18.18) \approx (1,1,-1) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{R_1R_2} = (1,1,0)$$

$$\left[\overrightarrow{R_1R_2}, \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$d(r_1,r_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{R_1R_2}, \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}\right]\right|}{\left|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}\right|} = \frac{|-3|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|} = \frac{3}{|(-6,3,-3)|} = \frac{3}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

c) $$\pi \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \in r_1 \\ r_1 \in \pi \implies \begin{cases} \vec{u} = \vec{d}_{r_1} = (1,4,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{R_1P} = (1,3,3) \end{cases} \end{cases} \implies \pi = \left[\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot(x-1) - (y-2) - (z-3) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro(%)	Plata(%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos con una proporción del 72 % de oro y na proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

El lingote tendrá $0.72 \cdot 25 = 18$ gramos de oro y $0.16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata. Teniendo en cuenta las proporciones de la tabla escribimos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 25 \\ 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \end{cases}$$

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 20 & 15 & 12 & 360 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 20F_1 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 15 & 22 & 400 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ F_3 + 3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -8 & -140 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 12 + 10 = 25 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -5y - 8 \cdot 10 = -140 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2z = -20 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 12 \\ z = 10 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades:

$$P(A) = \frac{4}{9} \quad \& \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \& \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\overline{A} \mid B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{18}$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \implies$ los sucesos A y B no son independientes

b) $P\left(\overline{A} \mid B\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9}$

Septiembre 2017
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y la matriz identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Calcular la matriz $B = (A - I) \cdot (2I + 2A)$.

b) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ *y* $A^3 - I$.

c) Calcular la matriz inversa de A^6*, en caso de que exista.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a) $B = (A - I) \cdot (2I + 2A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\operatorname{ran}(A - I) = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$$\operatorname{ran}(A^2 - I) = \operatorname{ran} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{ran}(A^3 - I) = \operatorname{ran} \left[\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \operatorname{ran} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

c) Podríamos intentar sacar la potencia n-ésima A^n, pero no es necesario en este caso.

$$A^6 = (A^3)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} \overset{\odot}{=} \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\odot$ Dada una matriz diagonal $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ *y se pide:*

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 0$.

b) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)$ *y, en su caso, determinarlas.*

c) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

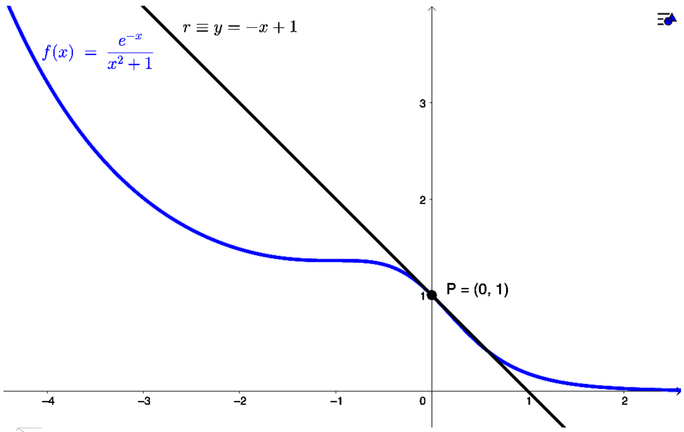
a) $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = -1$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - 1 = -x \Rightarrow \boxed{r \equiv y = -x+1}$$



b)
- `A. Vertical` Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow \nexists\ A.V.$
- `A. Horizontal`
  - $y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^2+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

    $\overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty \Longrightarrow \nexists \underset{x\to-\infty}{A.H.}$
  - $y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}\cdot(x^2+1)} = 0 \Longrightarrow \underset{x\to+\infty}{A.H.}$ en $y = 0$

c) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \begin{cases} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ Sol.} \\ x^2+2x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \end{cases}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	-	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en su dominio y tiene un *Punto de Inflexión* con tangente horizontal en $x = -1$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} P_1(3,2,0) \\ \vec{d_r} = \overrightarrow{P_1P_2} = (4,-2,2) \approx (2,-1,1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\overrightarrow{P_1Q} = (0,3,-3)$

$$d(Q,r) = \frac{\left|\vec{d_r} \times \overrightarrow{P_1Q}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|(0,6,6)|}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}\ u$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} Q(3,5,-3) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (2,-1,1) \end{cases} \implies 2x - y + z + D = 0 \xrightarrow{Q \in r} D = 2$$

$$\implies \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$$

$$R = r \cap \pi \implies 2\cdot(3+2\lambda) - (2-\lambda) + \lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1 \implies R(1,3,-1)$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ *y* $C(2,5,1)$ *y se pide:*

a) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B)

Solución.

a)
- $\overrightarrow{AB} = (2,-2,1) \implies \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9} = 3$
- $\overrightarrow{AC} = (1,2,2) \implies \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9} = 3$
- $\overrightarrow{BC} = (-1,4,1) \implies \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Por lo que $\overset{\triangle}{ABC}$ es *isósceles*.

b) $$\cos \widehat{A} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \overrightarrow{AC}} = \frac{|2-4+2|}{3 \cdot 3} = 0 \implies \hat{A} = 90°$$

Podríamos calcular de manera similar el resto de ángulos, pero como el triángulo es isósceles y rectángulo los otros ángulos serán $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$.