Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JUNIO 2017 (Coincidentes)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

2 de abril de 2021

Junio 2017 (Coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ *y* $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$, *definidas para* $x \in (-2, 4)$, *se pide:*

a) Hallar el valor o valores de x *para los que* $f'(x) = g'(x)$.

b) Hallar el punto x *del intervalo* $(-2, 4)$ *en el que la diferencia* $f(x) - g(x)$ *es mínimo y determinar el valor de esta diferencia mínima.*

c) Hallar $\lim\limits_{x\to -2^+} (f(x) - g(x))$ *y* $\lim\limits_{x\to 4^-} (f(x) - g(x))$.

d) Hallar $F(x)$, *primitiva de la función* $f(x)-g(x)$, *que cumple la condición* $F(2) = 2 + \ln 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{(x+2)^2} \\ g'(x) &= \frac{-1}{(x-4)^2} \end{aligned}\right\} \implies \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x-4)^2} \implies (x-4)^2 = (x+2)^2$$

$$\implies \cancel{x^2} - 8x + 16 = \cancel{x^2} + 4x + 4$$

$$\implies 12x = 12 \implies \boxed{x = 1}$$

b) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \implies f'(x) = g'(x) \implies x = 1$$

$$h''(x) = f''(x) - g''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x-4)^3} \implies h''(1) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{27} > 0$$

Por lo tanto la función $h(x) = f(x) - g(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y $h(1) = f(1) - g(1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

c)

$$\lim_{x\to -2^+} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to -2^+} \frac{-6}{(x+2)\cdot(x-4)} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 4^-} \frac{-6}{(x+2)\cdot(x-4)} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

d) $F(x) = \displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-4}\right) dx = \ln|x+2| - \ln|x-4| + C$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x-4}\right| + C$$

$$F(2) = \ln\left|\frac{4}{-2}\right| + C = \ln|-2| + C = 2 + \ln 2 \implies C = 2$$

$$F(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-4}\right| + 2$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

a) *Calcular la ecuación de una recta r', con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.*

b) *Hallar un plano perpendicular a OXY, que contenga a la recta r.*

c) *Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta r.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Si la recta r' pasa por el punto $P(1, 2, 0)$ y es perpendicular a la recta r, tiene que encontrarse en el plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r

$$r \equiv x - 1 = y = z \implies r \equiv \begin{cases} R(1, 0, 0) \\ \vec{d_r} = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1, 2, 0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (1, 1, 1) \end{cases} \implies x + y + z + D = 0 \xrightarrow{P \in \pi} 1 + 2 + 0 + D = 0$$

$$\implies D = -3 \implies \pi \equiv x + y + z - 3 = 0$$

Como r' ha de pertenecer también al plano $OXY \equiv z = 0$ daremos su ecuación en implícitas como intersección de los dos planos:

$$r' \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) $$\pi' \equiv \begin{cases} R(1, 0, 0) \\ \vec{u}_{\pi'} = \vec{d_r} = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_{\pi'} = \vec{n}_{OXY} = (0, 0, 1) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \boxed{\pi' \equiv x - y - 1 = 0}$$

c) $$d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{OR} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|(0, -1, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, u$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35.20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)*

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio del artículo } A \text{ (€)"} \\ y &\equiv \text{"Precio del artículo } B \text{ (€)"} \\ z &\equiv \text{"Precio del artículo } C \text{ (€)"} \end{aligned}$$

Los precios de la segunda unidad de cada producto serán:

$$\begin{cases} \text{A tiene un descuento del } 60\,\% & \rightarrow \ x \cdot (1 - 0.6) = 0.4x \\ \text{B tiene un descuento del } 75\,\% & \rightarrow \ x \cdot (1 - 0.75) = 0.25y \\ \text{C tiene un descuento del } 50\,\% & \rightarrow \ x \cdot (1 - 0.5) = 0.5z \end{cases}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ 1.4x + 1.25y + 1.5z = 35.2 \\ 1.25y + z = y + 1.5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 26 \\ 140x + 125y + 150z = 3520 \\ 0.25y - 0.5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 26 \\ 28x + 25y + 30z = 704 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 28 & 25 & 30 & 704 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \ F_2 - 28F_1 \ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 2 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \ 3F_3 + F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 2 & -24 \\ 0 & 0 & -4 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x + 12 + 6 = 26 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ -3y + 2 \cdot 6 = -24 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad -4z = -24 \ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 12 \\ z = 6 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) Calcular su inversa.

b) Calcular la matriz B *para que* $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sea solución del sistema* $A^2X = B$.

(Madrid - Matemáticas II - 2017 Junio - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Vamos hallar la matriz inversa de A por el método de los adjuntos. Para ello calculamos su determinante: $|A| = 0 + 12 - 6 - (0 + 8 + 0) = -2$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -14 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -14 & 3 \\ 4 & -8 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

P.D.: Para comprobar si la hemos calculado bien deberíamos ver si $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$, teniendo en cuenta que va a resultarte más fácil que dejes el $-\frac{1}{2}$ fuera de la matriz y que con uno de los productos nos basta como comprobación.

Hallamos la matriz B:

$$B = A^2X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -6 & 19 \\ 12 & -8 & 26 \\ 29 & -20 & 63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -22 \\ -53 \end{pmatrix}$$

Junio 2017 (Coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my+3z & = & 4 \\ x+y-2z & = & -2 \\ 3x+(m+1)z & = & m+2 \end{array}\right\}$$

a) *Discutirlo según los valores del parámetro real m.*

b) *Resolverlo para $m=-3$.*

c) *Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y=0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} |A| = m+1-6m+0-(9+m^2+m+0) \\ = -m^2-6m-8=0 \Longrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-4 \end{cases} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\} \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m=-2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $m=-4 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $m = -3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & -11 & -13 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 4F_3 - 9F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow \quad x - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 4y - 5 \cdot 2 = -6 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z = 2 \quad \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

c) Dos formas de resolver este apartado.

I) Método rápido. Si $y = 0$ el sistema nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 3z & = & 4 \\ x - 2z & = & -2 \\ 3x + (m+1)z & = & m+2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1 - E_2} 5z = 6 \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 2/5 \\ y = 0 \\ z = 6/5 \end{array}}$$

Dependiendo de cómo estén los parámetros el sistema puede ser más difícil de resolver ya que no es un sistema lineal.

II) Método general. Nos dicen que el sistema es compatible. Vamos a suponer que se trata de un S.C.D. y, resolviéndolo por Cramer, obligaremos a que $y = 0$.

$$|A| = -m^2 - 6m - 8 = -(m+2) \cdot (m+4) \quad \& \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = -(m+2)$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\cancel{-(m+2)}}{\cancel{-(m+2)} \cdot (m+4)} = \frac{1}{m+4} = 0 \implies 1 = 0 \Rightarrow \text{ Contradicción!}$$

La contradicción viene de haber supuesto que el sistema era compatible determinado y nos ha salido un valor del parámetro m para el que el sistema es compatible indeterminado. Por tanto para que $y = 0$ el sistema ha de ser compatible indeterminado, luego $m = -2$ y resolvemos el S.C.I., para lo cual escribimos tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow x - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6/5 = 4 \\ \Rightarrow 3y - 5\lambda = -6 \Rightarrow y = \frac{-6+5\lambda}{3} = 0 \Rightarrow \lambda = 6/5 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \implies \boxed{\begin{array}{c} x = 2/5 \\ y = 0 \\ z = 6/5 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros queden lo más abajo y a la derecha posible. Posteriormente aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \sim \; F_1 \leftrightarrow F_2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 3 & 4 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & m+7 & m+8 \end{array}\right) \sim \quad (m-1)F_3 + 3F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & m^2+6m+8 & m^2+7m+10 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} m^2+6m+8=0 \\ m = \{-2,-4\} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Determinado
- Si $m = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Comp. Indeterminado
- Si $m = -4 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

b) Resolvemos para el valor de $m = -3$, para lo cual sustituimos el parámetro en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior y resolvemos, teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x + 1 - 2\cdot 2 = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4y + 5 \cdot 2 = 6 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -z = -2 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}}$$

c) La resolución de este apartado es la misma que la planteada en la sección de Método de Rouché. Nos remitimos a ella

---

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dado el punto $P(5,7,10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 7$; se pide:

a) Calcular el punto P', simétrico de P respecto de π.

b) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1,1,1)$ y tiene dirección $\vec{v} = (-10,2,2)$.

c) Calcular el área del triángulo que tiene por vérices a los puntos P, Q y al origen de coordenadas $O(0,0,0)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Hallamos la recta $r \perp \pi \mid P \in r$.

$$r \equiv \begin{cases} P(5,7,10) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,2,3) \end{cases} \Longrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 10 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto $O \in r$, intersección de la recta r y el plano π

$$5+\lambda+2\cdot(7+2\lambda)+3\cdot(10+3\lambda)=7 \Rightarrow 14\lambda+42=0 \Rightarrow \lambda=-3 \Rightarrow O(2,1,1)$$

$$O = M_{\overline{PP'}} = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P = 2\cdot(2,1,1)-(5,7,10) \Rightarrow P' = (-1,-5,-8)$$

b) Hallamos la recta s que pasa por $Q(1,1,1)$ y lleva la dirección $\vec{v} = (-10,2,2)$

$$s \equiv \begin{cases} Q(1,1,1) \\ \vec{d_s} = \vec{v} = (-10,2,2) \end{cases} \Longrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{d_s} = (1,2,3)\cdot(-10,2,2) = 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$$

c) Area de $\overset{\triangle}{OPQ}$, siendo $P(5,7,10)$, $Q(1,1,1)$ y $O(0,0,0)$

$$Area_{\overset{\triangle}{OPQ}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot|(-3,5,-2)| = \frac{\sqrt{38}}{2}\ u^2$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\, x\cos x}{3\,\text{sen}^2 x\cos x + 2\,\text{sen}\, x} \quad \& \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}\right).$$

b) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1)\cdot\cos(2u)\,du \quad \& \quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx.$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\, x\cos x}{3\,\text{sen}^2 x\cos x + 2\,\text{sen}\, x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\text{sen}\, x}\cdot(4\,\text{sen}\, x - 5\cos x)}{\cancel{\text{sen}\, x}\cdot(3\,\text{sen}\, x\cos x + 2)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\,\text{sen}\, x - 5\cos x}{3\,\text{sen}\, x\cos x + 2} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x-(2x+7)}{\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{2x+7}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\infty$$

b)

$$\int (3u+1)\cdot\cos(2u)\,du = \left\{ \begin{array}{ll} t = 3u+1 & \Rightarrow dt = 3\,du \\ dv = \cos(2u)\,du & \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(2u) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(3u+1)\cdot\operatorname{sen}(2u) - \int \frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}(2u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(3u+1)\cdot\operatorname{sen}(2u) + \frac{3}{4}\cdot\cos(2u) + C$$

$$\int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx = \frac{7}{4}\int_2^5 \frac{4}{4x+1}\,dx = \frac{7}{4}\cdot\ln|4x+1|\Big]_2^5 = \frac{7}{4}\cdot\ln|21| - \frac{7}{4}\cdot\ln|9|$$

$$= \frac{7}{4}\cdot\ln\frac{7}{3}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

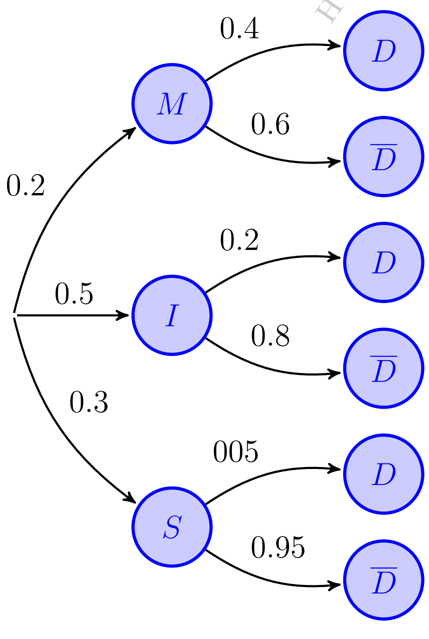
a) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) Si no ocupa un cargo direcivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.



a) Sean los sucesos:

$M \equiv$ El empleado es matemático
$I \equiv$ El empleado es ingeniero
$S \equiv$ El empleado no tiene carrera
$D \equiv$ El empleado ocupa un cargo directivo

$$P(D) = P(M\cap D) + P(I\cap D) + P(S\cap D)$$
$$= P(M)\cdot P(D \mid M) + P(I)\cdot P(D \mid I)$$
$$+ P(S)\cdot P(D \mid S) = 0.2\cdot 0.4$$
$$+ 0.5\cdot 0.2 + 0.3\cdot 0.05 = 0.195$$

$$P(M \mid \overline{D}) = \frac{P(M\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(M)\cdot P(\overline{D}\mid M)}{1-P(D)}$$
$$= \frac{0.2\cdot 0.6}{1-0.195} = 0.149$$
