Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

SEPTIEMBRE 2016
(Extraordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

22 de abril de 2021

Septiembre 2016
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = (6-x)\cdot e^{x/3}$, se pide:

a) Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) Deterjinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a)
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- `Asíntotas`
  - `A. Vertical` Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists\ A.V.$
  - `A. Horizontal`
    - $y = \lim\limits_{x\to-\infty}(6-x)\cdot e^{x/3} = \lim\limits_{x\to+\infty}(6+x)\cdot e^{-x/3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6+x}{e^{x/3}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

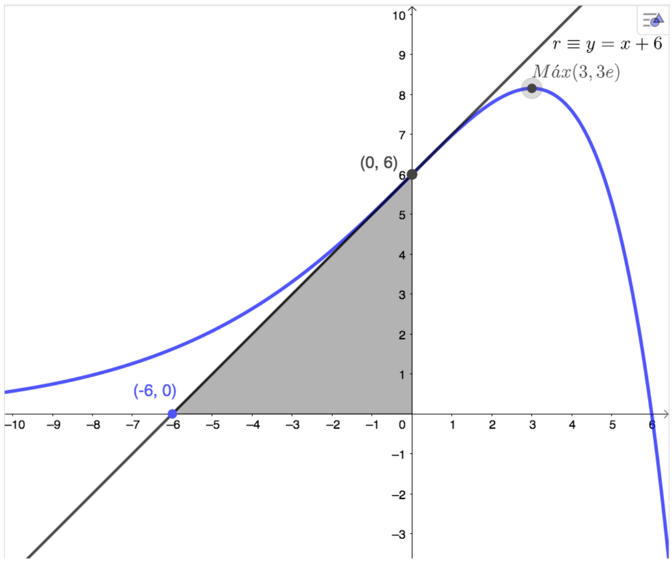
      $\stackrel{L'Hop}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{3}\cdot e^{x/3}} = 0 \implies A.H.$ en $y = 0$ cuando $x\to-\infty$
    - $y = \lim\limits_{x\to+\infty}(6-x)\cdot e^{x/3} = -\infty \implies \nexists\ A.H.$ cuando $x\to+\infty$
  - `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx+n$

    $$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6-x}{x}\cdot e^{x/3} = -\infty \implies \nexists\ A.O. \text{ cuando } x\to+\infty$$
- Cortes con los ejes
  - Eje OX: $y = 0 \implies (6-x)\cdot e^{x/3} = 0 \implies \begin{cases} 6-x=0 & \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6,0) \\ e^{x/3} = 0 & \Rightarrow \nexists \text{ Sol} \end{cases}$
  - Eje OY: $x = 0 \implies y = (6-0)\cdot e^{0/3} = 6 \implies (0,6)$

b) $f'(x) = -e^{x/3} + \dfrac{1}{3} \cdot (6 - x) \cdot e^{x/3}$

$$= \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cdot e^{x/3} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{3} = 0 \implies x = 3 \\ e^{x/3} = 0 \implies \nexists \text{ Sol.} \end{cases}$$



	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 3)$ y *decreciente* en $(3, +\infty)$, y tiene un *máximo relativo* en $(3, 3e)$.

c) La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ será:

$x_0 = 0 \implies y_0 = f(x_0) = f(0) = 6 \implies P(0, 6)$

$m_r = f'(x_0) = f'(0) = \left(1 - \dfrac{0}{3}\right) \cdot e^{0/3} = 1$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 6 = 1 \cdot (x - 0) \implies r \equiv y = x + 6$

Esta recta corta a los ejes en los puntos $(-6, 0)$ y $(0, 6)$ y el área pedida será:

$Area = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\ u^2$

O si lo queremos ver como una integral:

$$Area = \left| \int_{-6}^{0} (x + 6)\, dx \right| = \left| \left. \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-6}^{0} \right| = |-18| = 18\ u^2$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ *y* $s \equiv \{(2+\lambda, 1-3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, *se pide:*

a) Obtener la recta que pasa por el punto $P(1,0,5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \quad \Rightarrow r \equiv \begin{cases} R(1,3,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,1) \end{cases} \quad \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 3-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

a) Si la recta t pedida corta perpendicularmente a r, estará contenida en un plano $\pi \perp r$ que pase por P.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,0,5) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (2,-3,1) \end{cases} \Longrightarrow\ 2x-3y+z+D=0 \xrightarrow[D=-7]{P\in\pi} \pi \equiv 2x-3y+z-7=0$$

$$Q = r \cap \pi \implies 2\cdot(1+2\lambda) - 3\cdot(3-3\lambda) + \lambda - 7 = 0 \implies \lambda = 1 \implies Q(3,0,1)$$

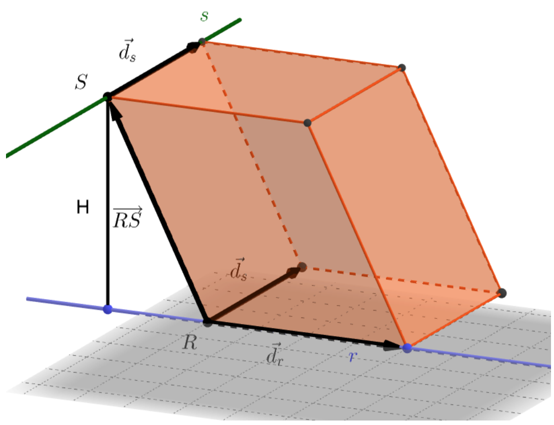
$$t \equiv \begin{cases} P(1,0,5) \\ Q(3,0,1) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} P(1,0,5) \\ \vec{d_t} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,-4) \end{cases} \implies t \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 0 \\ z = 5-4\lambda \end{cases} ,\lambda \in \mathbb{R}$$

b) $d(r,s) = H = \dfrac{Vol}{A_{base}}$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 3-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \& \quad \overrightarrow{RS} = (1,-2,0)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right]\right|}{\left|\vec{d_r} \times \vec{d_s}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|}$$

$$= \frac{2}{|(0,-1,-3)|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:*

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) *Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde*

$$A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

a)

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha + \beta & -4\alpha \\ 5\alpha + 4\beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow 3\alpha + \beta = 3 & \Rightarrow \boxed{\beta = -3} \\ \Rightarrow -4\alpha = -8 & \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ \Rightarrow 5\alpha + 4\beta = -2 & \Rightarrow 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -2 \checkmark \\ \Rightarrow -\alpha + \beta = -5 & \Rightarrow -2 - 3 = -5 \checkmark \end{cases}$$

b) $A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ran(A)} = \text{ran}\begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}$

$|A| = (2\lambda + 1) \cdot (3\lambda + 1) - 2\lambda^2 = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1/4 \end{cases}$

Por lo tanto $\text{ran}(A) = 2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, -1/4\}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción A)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"N}^{\underline{o}}\text{ becas a estudiantes de grado universitario"}$$
$$y \equiv \text{"N}^{\underline{o}}\text{ becas a estudiantes de formación profesional"}$$
$$z \equiv \text{"N}^{\underline{o}}\text{ becas a estudiantes de postgrado"}$$

El sistema de ecuaciones será:

$$\begin{cases} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 3 & 494 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2-6F_1 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3+F_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 0 & -7 & -196 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x+56+28=115 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y-3\cdot 28=-196 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -7z=-196 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}}$$

Septiembre 2016
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

se pide:

a) *Discutirlo según los valores del parámetro a*

b) *Resolverlo cuando sea posible.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \implies a = \{-1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b)
- Si $a = 2$, resolvemos el sistema por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 + F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 2x + 0 - 2\lambda = 2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$, resolvemos el sistema por el método de Cramer ya que es un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{a^2 - a - 2} = \frac{a \cdot \cancel{(a^2 - a - 2)}}{\cancel{a^2 - a - 2}} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{a^2 - a - 2} = \frac{-(a-2)^{\cancel{2}}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{-a+2}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a^2 - 5a + 2}{a^2 - a - 2} = \frac{(2a-1) \cdot \cancel{(a-2)}}{(a+1) \cdot \cancel{(a-2)}} = \frac{2a-1}{a+1}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 3 & 2-a & 4-2a \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ (a+1) \cdot F_3 - 3F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1) \cdot (2-a) & (2-a) \cdot (2a-1) \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+1) \cdot (2-a) = 0 \\ \implies a = \{-1, 2\} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq \{-1, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado

- Si $a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado anterior los valores $a = 2$ y $a \neq \{-1, 2\}$

- Si $a = 2$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow -x + 0 + \lambda = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 3y = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow z = \lambda & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ \quad y = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ \quad z = \lambda \end{array}}$$

- Si $a \neq \{-1, 2\}$

$$A/A* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)\cdot(2-a) & (2-a)\cdot(2a-1) \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -x + \frac{2-a}{a+1} + \frac{2a-1}{a+1} = 1 - a & \Rightarrow \\ \Rightarrow (a+1)\cdot y = 2 - a & \Rightarrow \\ \Rightarrow (a+1)\cdot(2-a)\cdot z = (2-a)\cdot(2a-1) & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = a \\ y = \frac{2-a}{a+1} \\ z = \frac{2a-1}{a+1} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{5+x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y determinar sus asíntotas.

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $x < 0,\ f(x) = \dfrac{1}{5-x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$, luego continua en $x < 0$.
- Si $x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{5+x}$, que es continua en $\mathbb{R} - \{-5\}$, luego continua en $x > 0$.
- Si $x = 0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5}$
  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5}$
  - $f(0) = \dfrac{1}{5+0} = \dfrac{1}{5}$

  Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto la función $f(x)$ en continua en $\mathbb{R}$.

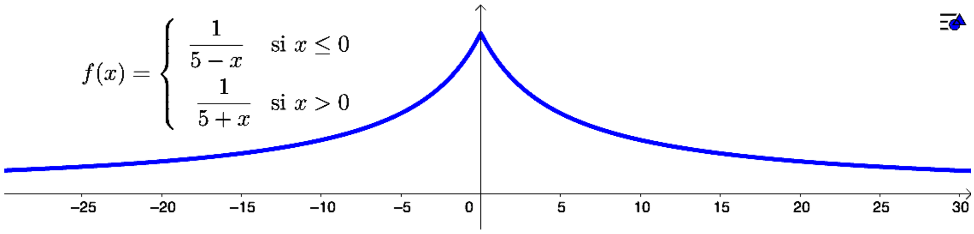
- `A. Vertical` Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \implies \nexists\ A.V.$
- `A. Horizontal`
  - $\displaystyle y = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{5-x} = 0 \implies$ $A.H.$ en $y = 0$ cuando $x \to -\infty$
  - $\displaystyle y = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{5+x} = 0 \implies$ $A.H.$ en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$
- `A. Oblicua` Como $\exists\ A.H. \implies \nexists\ A.O.$

b) Derivabilidad de $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{(5+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

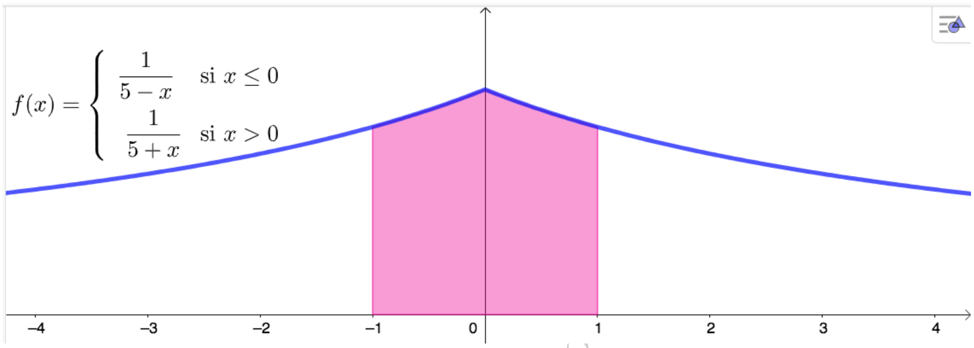
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \dfrac{1}{25} \\ f'(0^+) = -\dfrac{1}{25} \end{array}\right\} \implies f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$



c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx = -\ln|5-x|]_{-1}^{0} + \ln|5+x|]_{0}^{1}$

$$= -\ln 5 + \ln 6 + \ln 6 - \ln 5 = 2\ln 6 - 2\ln 5 = \ln 6^2 - \ln 5^2 = \ln\frac{36}{25}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

> *Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)*

Solución.

$$\pi \equiv \begin{cases} A(0,2,1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,-4,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \left[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 4x + 2\cdot(y-2) - 6\cdot(z-1) = 0 \Longrightarrow \pi \equiv 2x + y - 3z + 1 = 0$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes coordenados:

$$P = OX \cap \pi \xrightarrow[y=0]{z=0} x = -1/2 \Longrightarrow P(-1/2, 0, 0)$$

$$Q = OY \cap \pi \xrightarrow[x=0]{z=0} y = -1 \Longrightarrow Q(0,-1,0)$$

$$R = OZ \cap \pi \xrightarrow[x=0]{y=0} z = 1/3 \Longrightarrow R(0,0,1/3)$$

$$V_{OPQR} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right| = \left|\begin{vmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{36}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dado el plano $\pi \equiv 3x+3y+z-9=0$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2016 - Opción B)

Solución.

a) Si el plano π_1 pedido es perpendicular a π uno de sus vectores directores será el normal de π. Si ha de contener al eje OX, contendrá a un punto de este eje (el origen de coordenadas por ejemplo) y el vector director del eje será también vector director del plano.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{u}=\vec{n}_\pi=(3,3,1) \\ \vec{v}=\vec{d}_{OX}=(1,0,0) \end{cases} \quad \Rightarrow \pi \equiv \left[\overrightarrow{OX},\vec{u},\vec{v}\right] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv y-3z=0$$

b) El punto $P\in\pi$ más cercano al origen de coordenadas se encontrará en una recta $r\perp\pi \mid O\in r$.

$$r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{d}_r=\vec{n}_\pi=(3,3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} x=3\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ,\lambda\in\mathbb{R}$$

$$P=r\cap\pi \Longrightarrow 3\cdot 3\lambda+3\cdot 3\lambda+\lambda-9=0 \xrightarrow{\lambda=9/19} P\left(\tfrac{27}{19},\tfrac{27}{19},\tfrac{9}{19}\right)$$